Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

DĚLITELNOST

modely dělitelnosti v různých soustavách a v gaussových oborech integrity

Plzeň, 2006 Petra Čermáková

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne _____

_____
podpis

Poděkování

Děkuji vedoucí bakalářské práce paní RNDr. Libuši Teskové, CSc. za odborné vedení bakalářské práce. Dále bych chtěla poděkovat všem ostatním, kteří mi pomohli se zpracováním a dokončením bakalářské práce.

Abstrakt

Tato práce je zaměřena modely dělitelnosti v různých soustavách a v Gaussových oborech integrity. Je zde stručně popsán historický pohled na dělitelnost, také vlastnosti a kriteria dělitelnosti s jejich vysvětlením a odvozením. Dále se zde nalezne dělitelnost celých čísel v soustavách o různých základech. Na závěr zde můžeme nalézt základní vlastnosti dělitelnosti v oborech integrity a modely Gaussových oborů integrity.

1. Historie dělitelnosti **3**
1.1 Matematika v Číně 3
1.2 Matematika v Idii 6
1.3 Matematika v Islámských zemích 6
1.4 Matematika ve středověké Evropě 6

2. Vlastnosti dělitelnosti **9**
2.1 Dělitelnost na množině Z 9
2.2 Dělení se zbytkem na množině Z 9
2.3 Kongruence na množině Z 9
2.4 Rozklad složeného čísla v prvočinitele 10
2.5 Společný dělitel celých čísel 10
2.6 Společný násobek celých čísel 11

3. Kriteria dělitelnosti **11**
3.1 Dělitelnost dvěma 11
3.2 Dělitelnost třemi 11
3.3 Dělitelnost čtyřmi 12
3.4 Dělitelnost pěti 12
3.5 Dělitelnost šesti 12
3.6 Dělitelnost sedmi 12
3.7 Dělitelnost osmi 14
3.8 Dělitelnost devíti 15
3.9 Dělitelnost deseti 15
3.10 Dělitelnost jedenácti 15
3.11 Dělitelnost dvanácti 16
3.12 Dělitelnost třinácti 17
3.13 Dělitelnost čtrnácti 18
3.14 Dělitelnost patnácti 19
3.15 Dělitelnost šestnácti 20
3.16 Dělitelnost sedmnácti 21
3.17 Dělitelnost osmnácti 23
3.18 Dělitelnost devatenácti 23
3.19 Dělitelnost dvaceti 24

4. Dělitelnost celých čísel v soustavách o různých základech **25**
4.1 Tabulka prvních padesáti čísel v z-adické soustavě 25
4.2 Polyadicke číselné soustavy 26
4.3 Kriteria dělitelnosti 27
4.4 Dělitelnost v Z_3 27
4.5 Dělitelnost v Z_4 28
4.6 Dělitelnost v Z_5 28
4.7 Dělitelnost v Z_6 29

4.8 Dělitelnost v Z_7 30
4.9 Dělitelnost v Z_8 31
4.10 Dělitelnost v Z_9 32
4.11 Dělitelnost v Z_{10} 35

5. Dělitelnost v oborech integrity 35
5.1 Gaussova celá čísla 38
5.2 Pellovy rovnice 41

6. Literatura 47

Historie dělitelnosti

Začátky dělení můžeme sledovat od té doby, kdy se číslo 10 začalo vyjadřovat jako "polovina těla", což se objevilo v době paleolitu.

Matematika v Číně

Složitější počty se prováděly na počítací desce pomocí tyčinek. Jako deska mohla sloužit každá horizontální rovná plocha, na které se do sloupců sestavovaly početní tyčinky. Tyčinky nebyly delší než 15 cm a silnější než 0,5 cm, vyráběly se ze dřeva, později z litiny a pro zámožné ze slonoviny. Jedny a tytéž tyčinky zobrazovaly ve vodorovné poloze jednotky, stovky atd., zatímco ve svislé poloze desítky, tisíce atd.

Nejprve obě čísla vyjádříme tyčinkami vedle sebe. Potom tisíce druhého sčítance přičteme k tisícům prvého, dostaneme 14 876 a z druhého sčítance zůstane ještě 647. Pak přičteme stovky druhého sčítance ke stovkám prvého mezisoučtu. Obdobně naložíme i s druhým mezisoučtem a desítkami druhého sčítance atd.

Př. Sečteme 9 876 a 5 647

1 5 5 2 3	0
1 5 5 1 6	7
1 5 4 7 6	4 7
1 4 8 7 6	6 4 7
9 8 7 6	5 6 4 7

Př. Sečteme 13 852 a 4 715

1 8 5 6 7	0
1 8 5 6 2	5
1 8 5 5 2	1 5
1 7 8 5 2	7 1 5
1 3 8 5 2	4 7 1 5

Při násobení čísel, třeba 234 a 24, číslici násobitele 24, která má nejmenší desetinný řád, položíme pod tuto číslici násobence, která má největší desetinný řád, a násobitele násobíme hodnotu této cifry násobence, tudíž dvěma. Výsledek 48 se vloží do střední řádky. Pak posuneme násobitele 24 o jedno místo doprava, v násobenci vynecháme číslici 2 a 24 násobíme třemi ve dvou krocích - nejprve násobíme $2 \cdot 3$ a 6 připočteme ke 48

(obdržíme 54), a potom 4 násobíme 3 a výsledek 12 připočteme k 540 - tak získáme 552, a podobně pokračujeme dále.

Popsaný způsob počítání se liší od dnešního tím, že se početní úkony provádějí nejprve nejvyššího řádu postupně přecházíme k nižším řádům.

234	234	34	34	34	4	4	4	
	48	48	54	552	552	560	5616	5616
24	24	24	24	24	24	24	24	24

Př. $2561 \cdot 347$

Do horní části tabulky píšeme násobence, do dolní násobitele a doprostřed mezivýsledky.

2561	2561	2561	2561	561	561	561	561	61
	6	68	694	694	844	864	8675	8675
347	347	347	347	347	347	347	347	61

61	61	61	1	1	1	1	
8855	8879	88832	88862	88862	88866	888667	88667
347	347	347	347	347	347	347	347

Před zahájením dělení se určuje počet míst v podílu, což odpovídá naší poloze desetinné čárky. Dělitel, jehož odpovídající řády jsou nejprve položeny pod řády dělence, se posunuje tak dlouho doleva , dokud prvé číslice dělence nevytvoří co možná nejmenší číslo převyšující dělitele. Potom počet sloupců , o kterýž jsme posunuli dělitele, zvětšený o jedničku dává počet celých cifer v podílu. Při dělení se zbytkem zůstane na počítací desce nakonec celá část podílu, pod ní zbytek a ještě níže dělitel, takže bychom mohli číst výsledek jako celek s psaným zlomkem. V případě, že dělenec je menší než dělitel, posouval se pochopitelně dělitel vpravo. Počet míst, o která by byl dělitel posunut vpravo, pak dává řád podílu v desetinném zlomku. Kromě výpočtů s pomocí početních pomůcek se v užším rozsahu používalo i početní paměti. Znalost násobilky 9x9 se stala nejpozději v 8. století před n.l. součástí matematického vzdělání. Dochovaly se tabulky, psané lakem na dřevěných destičkách, obsahující součiny od 1x1 do 9x9, archeologové je zařazují do 1.století n.l.

V Číně byly odedávna známy i zlomky typu m/n. Zlomek m/n zapisovali jako "m n-tých dílů".

Operace se zlomky, prováděné rovněž na počítadle, byly v čínské matematice rozpracovány velmi podrobně, přitom se široce využívalo krácení zlomků. Svědčí o tom skutečnost, že prvé úkoly "Matematiky v devíti knihách" jsou věnovány právě krácení zlomků a předcházející partie jsou věnované jejich sčítání a odčítání. Pravidlo pro krácení říká: "To, co můžeš dělit dvěma, děl dvěma, jestliže není možné dělit dvěma, pak urči velikost čitatele a jmenovatele a odečti od většího menší, pokračuj vzájemném zmenšování, dokud nezískáš stejná čísla, tímto stejným číslem krať"

Př.
354/123
354/123, 231/123, 108/123, 108/15, 93/15, 78/15, 63/15 48/15,
33/15, 18/15, 3/15, 3/12, 3/9, 3/6, 3/3 tudíž budeme dělit 3.

354/ 123 = 118/41
Tato čísla opět nelze dělit 2, tak je budeme opět odečítat..
77/41, 36/41, 36/5, 31/5, 26/5, 21/5, 16/5, 11/5, 6/5, 1/5,
1/4, 1/3, 1/2, 1/1

Dle tohoto výsledku jsou čísla dělitelná už pouze jedničkou a proto můžeme tvrdit, že jsou nesoudělná.

Toto stručné pravidlo není ničím jiným než metodou nalezení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel pomocí tak zvaného Euklidova algoritmu, který lze vyjádřit takto:

$a - b \cdot q = r_1$
$b - r_1 \cdot q_1 = r_2$
.....
$r_{n-2} - r_{n-1} \cdot q_{n-1} = r_n$
$r_{n-1} = r_n \cdot q_n$

Euklides nemluví o dělení čísla r_{k-1} číslem r_n , ale o postupném odečítání r_k od r_{k-1} tak dlouho, dokud je to možno provádět. Největšího společného dělitele pak získáme, jestliže při stálém odečítáním menšího od většího zůstane jisté číslo, které je dělitelem předcházejícího. Při schématickém vyjádření algoritmu tak jak je podán v "Matematice v devíti knihách" musíme nahradit pouze poslední řádek v předchozích rovnicích následujícím výrazem:

$r_{n-1} - r_n \cdot (q_n - 1) = r_n$

V tomto výrazu se vyskytuje největší společný dělitel r_n tehdy, jestliže vzniknou stejná čísla. Podle pravidla z prvé knihy "Matematiky v devíti knihách" počítali jmenovatele součtu zlomků jednoduše vynásobením jmenovatelů sčítanců a nikdy není ani zmínky o snaze nalézt nejmenší společný násobek. Teprve po sečtení zlomků krátili obdržený součet.

Moderní pravidlo pro výpočet nejmenšího společného jmenovatele formuloval v 10.stol. Abul-Wafá a v Evropě Leonardo Pisánský.

Při dělení čísla zlomkem dělence přímo násobili jmenovatelem dělitele a výsledek děliteli čitatelem. Antičtí a středověcí matematikové při dělení prostých zlomků nejprve uváděli obě čísla na společného jmenovatele, a potom dělili čitatele dělence čitatelem dělitele. Tak postupovali jak starořečtí, tak i byzantští matematici, ale též matematici arabských zemí a středověké Evropy. Teprve Michael Stifer r.1544 znovu formuloval ve své práci "Arithmetica integra" pravidlo pro dělení zlomkem jako násobení jeho reciprokou hodnotou.

V případě smíšeného čísla psali celou část nad čitatelem zlomkové části, při operacích s celými čísli čísly a zlomky vyjadřovali celá čísla jako zlomky se jmenovatelem 1. Obecné zlomky s čitatelem různým od jedničky se vyskytly poprvé v Apastambových "Pravidlech provazce", ale i tam se používají kmenové zlomky, případně i s celými čísly dělené kmenové zlomky

Matematika v Indii

V Indii dělení poměrně podrobně popisuje Árjabhatta II. . Dělitel se píše pod dělenec tak, aby první číslice obou čísel byly pod sebou a od dělence se odečítá vhodný násobek dělitele. Potom se operace opakuje se zbytkem a posunutým dělitelem atd. Dělení čísla různého od nuly , nulou považovali zpočátku za nemožné, ale později došli k myšlence, že dělení nulou dá nekonečno. Bháskara II. psal, že taková veličina, jako a/0 pro $a \neq 0$, se nezmění, ať k ní přičteme nebo od ní odečteme jakékoliv číslo. Krišna, komentátor prací Bháskary uvádí neobyčejně jemné úvahy věnované násobení a dělení nulou. Čím menší je násobenec, říká, tím menší je součin, jestliže se zmenšuje násobenec k nejzazší mezi, zmenšuje se i součin. Protože maximální zmenšení veličiny ji převádí do nuly, je $0 \cdot a = 0$. Podrobně se zdůvodňuje rovnice $a \cdot 0 = 0$ a odpovídajícím způsobem nekonečnost podílu při dělení nulou. V problému dělení nuly nulou neměli indičtí matematikové nikterak jasno.

Počítání se zlomky bylo v Indii velice podrobně rozpracováno. Forma zápisů zlomků se téměř shodovala se současnou formou: čitatele psali nad jmenovatele, ale nepoužívali zlomkovou čáru.

Matematika v Islámských zemích

O dělení se říká, že je "podobné násobení, ale je chápáno obráceně, protože při dělení odebíráme, kdežto při násobení přidáváme". Současně je řečeno, že výsledek dělení je to, co "připadá na jednotku".

Podle Joanna ze Sevilly znamená termín "dělit" (dividere), větší číslo "rozdělit na části velikosti menšího, tj. odečítat menší od většího tolikrát, kolikrát je v něm obsaženo".

Matematika ve středověké Evropě

Bernelinus rozlišuje dva základní způsoby dělení: bez používání rozdílů a s jejich používáním. První metodou rozumí postup, podobný tomu, na který jsme zvyklí, druhou metodou je tak zvané dělení s doplňkem, při kterém se dělení daným čísle b zaměňuje jednodušším dělením číslem c, které se málo liší od b a je "zaokrouhlené". Tento postup však mimořádně zvětšuje celkový počet operací, po každém dělení je nutné násobit doplňkem c - b (nebo b - c) a sčítat. Dělenec se pokaždé ještě rozkládá na jednotlivé řády. Jestliže označíme dělenec a = 10m + n, potom se dělení zakládá na rovnosti
a/6 = 10m/10 +(4m +n)/6 = m + (4m + n) / 6

Př.
Číslo 668 je možno dělit 6 s použitím rozdílu 10 - 6 = 4 následujícím způsobem:

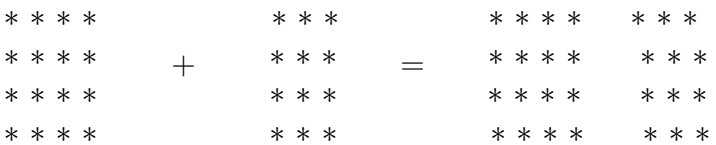
600 : 10 = **60** , $60 \cdot 4 = 240$, 200 : 10 = **20**, $20 \cdot 4 = 80$, $60 + 40 + 80 = 180$,
100 : 10 = **10**, $10 \cdot 4 = 40$, $80 + 40 = 120$,
100 : 10 = **10**, $10 \cdot 4 = 40$, $20 + 40 = 60$,
60 : 10 = **6**, $6 \cdot 4 = 24$, 20 : 10 = **2**, $2 \cdot 4 = 8$, $8 + 4 + 8 = 20$,
20 : 10 = **2**, $2 \cdot 4 = 8$
a nakonec 8 : 6 dává podíl 1 se zbytkem 2. Sečteme tučné postupné podíly, dostaneme hledaný podíl $60 + 20 + 10 + 10 + 6 + 2 + 2 + 1 = 111$ se zbytkem 2.

Př.
523 : 8
Použijeme rozdíl 10 - 8 = 2
500 : 10 = **50**, $50 \cdot 2 = 100$, 100 : 10 = **10**,
$10 \cdot 2 = 20$, $20 + 20 = 40$,
40 : 10 = **4**, $4 \cdot 2 = 8$, $8 + 3 = 11$,
11 : 8 = **1** se zbytkem 3
$50 + 10 + 4 + 1 = 65$ se zbytkem 3

Pythagorejci zdůrazňovali studium neměnných prvků v přírodě i ve společnosti. Nejvýznamnější vůdce byl Archytas z Tarentu, žil okolo roku 400. Čísla byla rozdělena do tříd na sudá a lichá, sudé násobky sudých, liché násobky lichých, prvočísla a složená čísla, dokonalá čísla, příbuzná čísla atd.

Čísla reprezentovaná hromádkami kaménků, se můžeme snažit "srovnávat" do různých obdélníčků (popřípadě čtverců) a zjišťovat, kdy to jde a kdy ne, kolik kaménků zbývá (tj. nalézat zbytky při dělení) apod. Rozlišíme tak čísla složená, která je možno reprezentovat nějakým obdélníkovým či čtvercovým číslem, a prvočísla, pro která to možné není (ta reprezentuje čísly přímkovými). Pythagorejci rozlišovali i čísla sudo-sudá, sudo-lichá a licho-lichá. Snadno ukážeme, že součet dvou čísel, která jsou dělitelná nějakým číslem, je rovněž tímto číslem dělitelný;

$16 + 12 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 4 \cdot (4 + 3)$



Můžeme uvažovat i o soudělnosti a nesoudělnosti čísle, snadno znázorníme i největší společný dělitel. Daná čísla je třeba "srovnat" do obdélníků se "společnou" stranou a to tak, aby tato společná strana byla co největší.

* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *

Zde je ukázáno, že číslo 4 je největším společným dělitelem čísel 12 a 8

* * * * * * * * *
zde je ukázáno, že čísla 4 a 5 jsou nesoudělná
Součet dvou po sobě jdoucích lichých čísel je dělitelný čtyřmi

Důkaz:
Liché číslo můžeme zapsat jako 2k - 1, následující liché číslo je 2k - 1 + 2 = 2k + 1 Tudíž můžeme napsat: (2k - 1)+(2k + 1) = 4k. A zde je již vidět, že číslo 4k je dělitelné 4.

Dokonalé číslo - (6, 28, 496, 8 128 ...) - součet všech svých dělitelů, které jsou menší než ono číslo - Eukleides

např.
6 = 1 + 2 + 3
28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14
496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248
8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064

Spřátelená čísla - 220 a 284 - číslo 220 je součtem všech dělitelů čísla 284 a číslo 284 je součtem všech dělitelů čísla 220 (mezi dělitele samozřejmě nepočítáme čísla 220 a 284)

Př.
Číslo 220 má dělitele : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110
1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284
Číslo 284 má dělitele : 1, 2, 4, 71, 142
1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220

Vlastnosti dělitelnosti

Dělitelnost na množině Z

Dělitelnost v oboru celých čísel Z pro libovolnou dvojici celých čísel $a, b \neq 0$ definujeme: číslo a je dělitelné číslem b , právě když existuje takové celé číslo k, že platí $a = bk$, tj. když číslo a je násobkem (k-násobkem) čísla b. Říkáme pak též, že číslo b je dělitelem čísla a nebo že číslo b dělí číslo a. Píšeme $b \mid a$.

Pro dělitelnost na množině Z platí (a,b,c,m,n ∈ Z):

$a \mid b \bigwedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$
$c \mid a \bigwedge c \mid b \Rightarrow c \mid am + bn$
$a \mid b \Rightarrow a \mid bc$
$a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$
$cb \mid ca \Rightarrow b \mid a$

Dělení se zbytkem na množině Z všech celých čísel nazýváme zobrazení, které každé uspořádané dvojici [a,b] ($b \neq 0$) celých čísel přiřazuje uspořádanou dvojici [q,r] celých čísel, přičemž platí: $A = bq + r$, $0 \leq r < |b|$

Číslo q se nazývá *částečný* (neúplný) podíl čísel *a,b* a číslo r nejmenší nezáporný zbytek čísla a při dělení číslem b (nejmenší nezáporný zbytek čísla a podle modulu b), stručně zbytek při dělení.

Dělení beze zbytku na množině Z
Ve speciálním případě pro r = 0 mluvíme o dělení beze zbytku.

Kongruence na množině Z
Jestliže rozdíl *a-b* $(a, b \in Z)$ je dělitelný číslem $m \in N$, říkáme, že číslo a je kongruentní s číslem b podle modulu m a píšeme $a \equiv b \ mod \ m$.

Každá množina těch celých čísel , která při dělení číslem $m \in N$ dávají týž nejmenší nezáporný zbytek, se *nazývá zbytková třída podle modulu* m *nebo zbytková třída* mod m.

Dělitelé jednotkového prvku se nazývají jednotky.

Prvek $a \in Z$ nazýváme *asociovaným* k prvku $b \in Z$, jestliže platí : $a = b\varepsilon$, kde ε je jednotka.

Každý prvek $a \in Z$ je asociován sám sebou.

Je-li $b \in Z$ asociován s $a \in Z$, je též a asociován s b.

Nechť $a \neq 0$, $b \neq 0$ ze Z, a je asociován s b tehdy a jen tehdy , platí-li současně *a/b, b/a.*

Každé celé číslo je dělitelem nuly, ale nula není dělitelem žádného celého čísla různého od nuly.

Každý prvek $a \neq 0$ je dělitelný sám sebou. Je totiž $a = a \cdot 1$.
Každý prvek a je dělitelný jednotkovým prvkem *1*.

Číslo k se nazývá *podíl* čísla a při dělení číslem b.
V oboru Z mají čísla *a, -a* právě tytéž dělitele.
Čísla *1, -1, a, -a* se nazývají *nevlastní dělitelé* čísel *a, -a* v oboru Z.
Každé číslo $a \in Z$ je dělitelné nevlastními (samozřejmými) děliteli. Existují-li další dělitele čísla $a \in Z$, nazývají se *vlastní* (nesamozřejmí) *dělitelé*.

Prvek $a \neq 0$ z R, který má pouze nevlastní dělitele , nazývá se *ireducibilní* prvek. V celých číslech je ireducibilní prvek totéž jako prvočíslo.
Prvek $a \in Z$, který má alespoň jednoho vlastního dělitele, nazývá se *reducibilní* (složený) prvek.

Každé celé číslo různé od nuly, které má aspoň jednoho vlastního dělitele, se nazývá *složené*.
Čísla *1,-1* nejsou ani složenými čísly, ani prvočísly.
Je-li složené číslo a dělitelné prvočíslem p, pak prvočíslo p nazýváme prvočinitelem čísla a.

Rozklad složeného čísla v prvočinitele - ireducibilní rozklad
Každé složené číslo a lze jednoznačně až na pořadí a znaménka činitelů vyjádřit jako součin konečně mnoha prvočísel. Napíšeme-li složené číslo a pomocí prvočísel $p_1, p_2 ... p_n$,(která nemusí být od sebe různá) ve tvaru $a = p_1 p_2 ... p_n$ říkáme, že jsme provedli rozklad složeného čísla a v prvočinitele (rozklad složeného čísla a v součin prvočísel)
Wilsonova věta : Jestliže $p > 1 (p \in N)$, pak číslo *(p-1)! + 1* je dělitelné číslem p, právě když číslo p je prvočíslem. [viz.literatura: Zajímavá algebra]

Společný dělitel celých čísel
Celé číslo $d \neq 0$, které je dělitelem každého z daných čísel $a_1, a_2, ..., a_n \in Z$ $(n > 1)$, se nazývá společný dělitel celých čísel $a_1, a_2, ..., a_n$
Celá čísla $a_1, a_2, ..., a_n, (n > 1)$ se nazývají *nesoudělná*, právě když nemají jiné společné dělitele než nevlastní společné dělitele.
Celá čísla $a_1, a_2, ..., a_n, (n > 1)$ se nazývají *po dvou nesoudělná*, právě když jsou nesoudělná každá dvě čísla $a_i, a_j, (i \neq j)$.
Celá čísla, která mají aspoň jednoho vlastního společného dělitele, se nazývají *soudělná*.

Největší společný dělitel celých čísel

Společného dělitele celých čísel $a_1, a_2, ..., a_n$, který je násobkem každého jiného jejich společného dělitele (tj. je největším ze společných dělitelů), nazýváme největším společným dělitelem celých čísel $a_1, a_2, ..., a_n$ a značíme $D(a_1, a_2, ..., a_n)$, nebo stručně D. Jestliže $a_i = 0$ pro *i=1,2,...* n, pak $D(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$. Jestliže aspoň jedno číslo a_i je různé od 0, pak vždy existují dva společní dělitelé D_1, D_2 , pro něž platí
$D_1(a_1, a_2, ..., a_n) = -D_2(a_1, a_2, ..., a_n)$

Nechť $a, b \in Z$. Je-li D(a,b) = 1, nazývají se prvky *a,b nesoudělné* .

Společný násobek celých čísel

Celé číslo k, které je násobkem každého z daných čísel $a_1, a_2, ..., a_n \in Z(n > 1)$, se nazývá společný násobek celých čísel $a_1, a_2, ..., a_n$.

Nejmenší společný násobek celých čísel

Společný násobek celých čísel $a_1, a_2, ..., a_n$, který je dělitelem každého jiného jejich společného násobku, nazýváme nejmenším společným násobkem celých čísel $a_1, a_2, ..., a_n$ a značíme $n(a_1, a_2, ..., a_n)$ nebo stručně n.

Jestliže aspoň jedno číslo $a_i = 0$, pak $n(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$.

Jestliže $a_i \neq 0$ pro *i=1,2, ... ,n*, pak existují dva nejmenší společné násobky n_1, n_2, pro něž platí $n_1(a_1, a_2, ..., a_n) = -n_2(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Kriteria dělitelnosti

Dělitelnost dvěma

Číslo je dělitelné dvěma právě tehdy, když poslední číslice čísla je sudá (tj. končí-li některou z číslic 0, 2, 4, 6, 8).

Př. 12; 568 ; 17 988 ...

Dělitelnost třemi

Číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když ciferný součet čísla je dělitelný třemi.

Př. 18 ; 534 ; 19 764 ...

Důkaz:

Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 100c + 1000d + ...$
Jeho ciferný součet je $a + b + c + d + ...$
Od čísla N odečteme jeho ciferný součet, tím získáme :
$(a + 10b + 100c + 1000d ...) - (a + b + c + d + ...) =$
$= 9b + 99c + 999d + ... = 3 \cdot (3b + 33c + 333d + ...)$
$3 \cdot (3b + 33c + 333d + ...)$ - toto číslo je zajisté dělitelné třemi.

Z toho plyne, že číslo *a + 10b + 100c + 1000d + ...* je dělitelné třemi právě tehdy, když jeho ciferný součet *a + b + c + d+ ...* je dělitelný třemi.

Dělitelnost čtyřmi
Číslo je dělitelné čtyřmi právě tehdy, když poslední dvojčíslí čísla je dělitelné čtyřmi
Př. 44 ; 572 ; 15 624 ...

Důkaz:
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 100c + 1000d + ...$
Jeho poslední dvojčíslí je : $a + 10b$
Od čísla N odečteme jeho poslední dvojčíslí, tím získáme :
$(a + 10b + 100c + 1000d + ...) - (a + 10b) = 100c + 1000d + ... =$
$= 4 \cdot (25c + 250d + ...)$
$4 \cdot (25c + 250d + ...)$ - toto číslo je zajisté dělitelné čtyřmi.
Z toho plyne, že číslo *a + 10b + 100c + 1000d + ...* je dělitelné čtyřmi právě tehdy, když jeho poslední dvojčíslí *a + 10b* ... je dělitelný čtyřmi.

Dělitelnost pěti
Číslo je dělitelné pěti právě tehdy, když poslední číslice čísla je nula nebo pětka
Př. 30; 955 ; 16 635

Důkaz:
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 100c + 1000d + ...$
Od čísla N odečteme jeho poslední číslici, tudíž dostaneme :
$(a + 10b + 100c + 1000d + ...) - a = 10b + 100c + 1000d + ... =$
$= 5 \cdot (2b + 20c + 200d + ...)$
$5 \cdot (2b + 20c + 200d + ...)$ - toto číslo je zajisté dělitelné pěti.
Z toho plyne, že číslo *a + 10b + 100c + 1000d + ...* je dělitelné pěti právě tehdy, když poslední číslice a je dělitelné pěti.

Dělitelnost šesti
Číslo je dělitelné **šesti** právě tehdy, když je dělitelné dvěma a třemi (tj. sudé a ciferný součet je dělitelný třemi)
Př. 12 ; 516 ; 11 880 ...

Dělitelnost sedmi
Při určování, zda je číslo dělitelné **sedmi**, můžeme použít dvě kriteria.

1. U prvního kriteria používáme jeho poslední cifru. Tuto číslici zdvojnásobíme a poté odečteme od děleného čísla bez této cifry. Tento postup opakujeme několikrát, dokud nepoznáme zda je či není číslo dělitelné 7.

Př. 51492		$2 \cdot 2 = 4$
5149 - 4 = 5145		$5 \cdot 2 = 10$
514 - 10 = 504		$4 \cdot 2 = 8$
50 - 8 = 42		
Číslo 42 je dělitelné 7	...	42 / 7 = 6

<u>*Důkaz:*</u>
10x + y = 7k
y = 7k - 10x

Podle předpokladu je číslo *10x + y* dělitelné sedmi.
Podle kriteria odečteme od děleného čísla bez jeho poslední cifry dvojnásobek této číslice, což je v našem případě *2y.*
Což je: *x - 2y*
Toto vyjádření můžeme ještě poupravit, a to:
$x - 2y = x - 2(7k - 10x) = 21x - 14k = 7 \cdot (3x - 2k)$
A takto vzniklé číslo je již dělitelné sedmi.

2. V druhém kritériu používáme nekonečnou posloupnost (1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, ...). Je-li pak součet všech součinů jednotlivých cifer čísla s odpovídajícím členem uvedené posloupnosti dělitelný sedmi, je dělitelné sedmi i toto číslo.
Odpovídajícím číslem posloupnosti je myšleno takovéto přiřazení: cifře nultého řádu přiřazujeme první prvek posloupnosti, cifře prvního řádu druhý prvek posloupnosti, cifře druhého řádu třetí prvek posloupnosti atd.

Př. 1 344 560
$0 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 4 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 7$
jelikož číslo 7 je dělitelné sedmi, tak i číslo 1 344 560 je dělitelné sedmi

<u>*Důkaz:*</u>
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i + ...$
Od tohoto čísla odečteme podle kritéria součet všech součinů jednotlivých cifer čísla s odpovídajícím členem uvedené posloupnosti.
$(a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i...) -$
$-(a + 3b + 2c - d - 3e - 2f + g + 3h + 2i...)$
A dostaneme :
$(10 - 3)b + (10^2 - 2)c + (10^3 + 1)d + (10^4 + 3)e + (10^5 + 2)f + (10^6 - 1)g +$
$+(10^7 - 3)h + (10^8 - 2)i + ...$

Dále pokračujeme matematickou indukcí:

1) $10^{6n+1} - 3 = 7k$
2) $10^{6n+2} - 2 = 7k$
3) $10^{6n+2} + 1 = 7k$
4) $10^{6n+4} + 3 = 7k$
5) $10^{6n+5} + 2 = 7k$
6) $10^{6n+6} - 1 = 7k \implies 10^{6n+6} = 7k + 1$

n = 0
10 - 3 = 7
$10^2 - 2 = 98 = 7 \cdot 14$
$10^3 + 1 = 1001 = 7 \cdot 143$
$10^4 + 3 = 10003 = 7 \cdot 1429$
$10^5 + 2 = 100002 = 7 \cdot 14286$
$10^6 - 1 = 999999 = 7 \cdot 142857$

Nechť tvrzení platí pro m, tak platí i pro $m + 1$:

1) $10^{6(m+1)+1} - 3 = 10^{6(m+1)} \cdot 10 - 3 = (7k + 1) \cdot 10 - 3 = 7 \cdot (10k + 1)$
2) $10^{6(m+1)+2} - 2 = 10^{6(m+1)} \cdot 10^2 - 2 = (7k + 1) \cdot 10^2 - 2 = 7 \cdot (10^2k + 14)$
3) $10^{6(m+1)+3} + 1 = 10^{6(m+1)} \cdot 10^3 + 1 = (7k + 1) \cdot 10^3 + 1 = 7 \cdot (10^3k + 143)$
4) $10^{6(m+1)+4} + 3 = 10^{6(m+1)} \cdot 10^4 + 3 = (7k + 1) \cdot 10^4 + 3 = 7 \cdot (10^4k + 1429)$
5) $10^{6(m+1)+5} + 2 = 10^{6(m+1)} \cdot 10^5 + 2 = (7k + 1) \cdot 10^5 + 2 = 7 \cdot (10^5k + 14286)$
6) $10^{6(m+1)+6} - 1 = 10^{6(m+1)} \cdot 10^6 - 1 = (7k + 1) \cdot 10^6 - 1 = 7 \cdot (10^6k + 142857)$

Nyní je zřetelně vidět, že dané číslo je dělitelné sedmi.

Dělitelnost osmi

Číslo je dělitelné osmi právě tehdy, když poslední trojčíslí čísla je dělitelné osmi

Př. 208 ; 1 240 ; 50 752 ...

Důkaz:

Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.

$N = a + 10b + 100c + 1000d +$

Od čísla N odečteme jeho poslední trojčíslí, tudíž dostaneme :

$(a + 10b + 100c + 1000d +) - (a + 10b + 100c) = 1000d + 10000e + ... =$

$= 8 \cdot (125d + 1250e + ...)$

$8 \cdot (125d + 1250e + ...)$ - toto číslo je zajisté dělitelné osmi.

Z toho plyne, že číslo $a + 10b + 100c + 1000d + \ldots$ je dělitelné osmi právě tehdy, když poslední trojčíslí $a + 10b + 100c$ je dělitelné osmi.

Dělitelnost devíti
Číslo je dělitelné devíti právě tehdy, když ciferný součet čísla je dělitelný devíti
Př. 126 ; 1 134 ; 10 206

Důkaz:
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 100c + 1000d +$
Jeho ciferný součet je $a + b + c + d + \ldots$
Od čísla N odečteme jeho ciferný součet, tím získáme :
$(a + 10b + 100c + 1000d...) - (a + b + c + d + ...) =$
$= 9b + 99c + 999d + ... = 9 \cdot (11b + 111c + 111d + ...)$
$9 \cdot (11b + 111c + 111d + ...)$ - toto číslo je zajisté dělitelné devíti.
Z toho plyne, že číslo $a + 10b + 100c + 1000d + \ldots$ je dělitelné devíti právě tehdy, když jeho ciferný součet $a + b + c + d + \ldots$ je dělitelný devíti.

Dělitelnost desíti
Číslo je dělitelné desíti právě tehdy, když poslední číslice čísla je nula
Př. 60 ; 160 ; 76 580 ...

Důkaz:
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 100c + 1000d + \ldots$
Od čísla N odečteme jeho poslední číslici, tudíž dostaneme :
$(a + 10b + 100c + 1000d + ...) - a = 10b + 100c + 1000d + ... =$
$= 10 \cdot (b + 10c + 100d + ...)$
$10 \cdot (b + 10c + 100d + ...)$ - toto číslo je zajisté dělitelné deseti.
Z toho plyne, že číslo $a + 10b + 100c + 1000d + \ldots$ je dělitelné deseti právě tehdy, když poslední číslice a je dělitelné deseti.

Dělitelnost jedenácti
Kriterium dělitelnosti jedenácti: od součtu všech číslic, které jsou na lichých číslech, odečteme součet všech číslic, které jsou na sudých místech. Je-li rozdíl roven nule nebo číslu (kladnému nebo zápornému), které je dělitelné 11, je i zkoumané číslo dělitelné beze zbytku číslem 11. V opačném případě zkoumané číslo není dělitelné 11.
Př. 3 151 775
$3 + 5 + 7 + 5 = 20$
$1 + 1 + 7 = 9$
20 - 9 = 11
Tudíž je číslo dělitelné 11.

Důkaz:
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 100c + 1000d + ... = a + 10 \cdot (b + 10c + 100d + ...)$

Od čísla N odečteme takto zapsané číslo X dělitelné 11, tj.
$X = 11 \cdot (b + 10c + 100d + ...)$
$N - X = a + 10 \cdot (b + 10c + 100d + ...) - 11 \cdot (b + 10c + 100d + ...) =$
$= a - b - 10 \cdot (c + 10d + ...)$
A tento rozdíl má stejný zbytek při dělení číslem 11 jako původní číslo *N*.
K rozdílu připočteme číslo opět dělitelné jedenácti $11 \cdot (c + 10d + ...)$
$a - b - 10 \cdot (c + 10d + ...) + 11 \cdot (c + 10d + ...) = a - b + c + 10 \cdot (d + ...)$
Toto číslo má opět stejný zbytek při dělení číslem 11 jako číslo *N*.
Odečteme od něj číslo $11 \cdot (d + ...)$, které je dělitelné 11, atd.
Nakonec dostaneme číslo $a - b + c - d + ... = (a + c + ...) \cdot (b + d)$, které má opět stejný zbytek při dělení jako číslem 11 jako původní číslo *N*.

Je znám i jiný způsob jak zjistit zda je číslo dělitelné 11, ale není vhodný pro dlouhá čísla. Zkoumané číslo rozdělíme zprava doleva na části obsahující dvě číslice a pak části sečteme. Je-li výsledek dělitelný 11, pak i zkoumané číslo je dělitelné jedenácti.

Př.
638
6 + 38 = 44
- to je dělitelné jedenácti,tudíž i číslo 638 je dělitelné 11.

70 906
06 + 09 + 7 = 22
- to je dělitelné jedenácti,tudíž i číslo 70 906 je dělitelné 11.

Důkaz:
Rozdělíme víceciferné číslo na části po dvou. Dostaneme čísla dvouciferná nebo jednociferná (např. 03, 07…). Označíme je zprava doleva *a, b, c, d, …* A tak číslo *N* zapíšeme ve tvaru *N = a + 100b + 10 000c + … = a + 100(b + 100c + …).*
Od čísla *N* odečteme číslo $99 \cdot (b + 100c + ...)$, které je dělitelné číslem 11.
Dostaneme : $a + (b + 100c + ...) = a + b + 100 \cdot (c + ...)$.
A toto číslo má stejný zbytek při dělení číslem 11 jako číslo *N*. Od rozdílu odečteme číslo $99 \cdot (c + ...)$, dělitelné číslem 11, atd. A na závěr zjistíme, že číslo *N* má stejný zbytek při dělení číslem 11 jako číslo *a + b + c + …*

Dělitelnost dvanácti
Číslo je dělitelné 12 právě když je dělitelný dvanácti ciferný součet
$a_0 - 2a_1 + 4a_2 + 4a_3 + 4a_4 + ...$

Př.
655 584 : 12 = 54 632
$1 \cdot 4 - 2 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 4 - 16 + 20 + 20 + 20 + 24 = 72$
$1 \cdot 2 - 2 \cdot 7 = 2 - 14 = -12$

Důkaz:
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i +$
Od tohoto čísla odečteme podle kritéria součet všech součinů jednotlivých cifer čísla s odpovídajícím členem uvedené posloupnosti.
$(a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i...)-$
$-(a - 2b + 4c + 4d + 4e + 4f + 4g + 4h + 4i...)$
A dostaneme :
$(10 + 2)b + (10^2 - 4)c + (10^3 - 4)d + (10^4 - 4)e + (10^5 - 4)f + (10^6 - 4)g +$
$+(10^7 - 4)h + (10^8 - 4)i + ...$
$10 + 2 = 12$

$\forall\ n \geq 2\ je 10^n - 4 = 12k, \exists k \in N$
dokážeme matematickou indukcí:
$n = 2, 10^2 - 4 = 96 = 12 \cdot 8$
nechť tvrzení platí pro m, tedy $10^m - 4 = 12k$ potom platí i pro
$10^{m+1} - 4 = 12k$
$10^m - 4 = 12k$
$10^m = 12k + 4$
$10^{m+1} - 4 = 10^m \cdot 10 - 4 = (12k + 4) \cdot 10 - 4 = 12 \cdot 10k + 36 = 12 \cdot (10k + 3)$
Nyní je zřetelně vidět, že dané číslo je dělitelné dvanácti.

Dělitelnost třinácti
Číslo je dělitelné 13 právě když je dělitelný třinácti ciferný součet
$a_0 - 3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5 + a_6 - 3a_7...$
Př. 8 512 257 : 13 = 654 789
$1 \cdot 7 - 3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8 = 7 - 15 - 8 - 2 + 3 + 20 + 8 = 13$

Důkaz:
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^5e + 10^6f + 10^7g + 10^8h + 10^9i + ...$
Od tohoto čísla odečteme podle kritéria součet všech součinů jednotlivých cifer čísla s odpovídajícím členem uvedené posloupnosti.
$(a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i...)-$
$-(a - 3b - 4c - d + 3e + 4f + g - 3h - 4i...)$
A dostaneme :
$(10 + 3)b + (10^2 + 4)c + (10^3 + 1)d + (10^4 - 3)e + (10^5 - 4)f + (10^6 - 1)g + +(10^7 + 3)h +$
$(10^8 + 4)i + ...$

Dále dokážeme matematickou indukcí: $\forall n \geq 0, \exists k \in N$tak, že:
$1) 10^{6n+1} + 3 = 13k$
$2) 106^{n+2} + 4 = 13k$
$3) 10^{6n+3} + 1 = 13k$

4)$10^{6n+4} - 3 = 13k$
5)$10^{6n+5} - 4 = 13k$
6)$10^{6n+6} - 1 = 13k$

Nechť n = 0
$10 + 3 = 13$
$10^2 + 4 = 104 = 13 \cdot 8$
$10^3 + 1 = 1001 = 13 \cdot 77$
$10^4 - 3 = 9997 = 13 \cdot 769$
$10^5 - 4 = 99996 = 13 \cdot 7692$
$10^6 - 1 = 999999 = 13 \cdot 76923$

Nechť tvrzení platí pro *m*, tak platí i pro *m + 1*
1)$10^{6(n+1)+1} + 3 = 10^{6(n+1)} \cdot 10 + 3 = (13k + 1) \cdot 10 + 3 =$
$= 13 \cdot 10k + 13 = 13 \cdot (10k + 1)$
2)$10^{6(n+1)+2} + 4 = 10^{6(n+1)} \cdot 10^2 + 4 = (13k + 1) \cdot 10^2 + 4 = 13k \cdot 10^2 + (10^2 + 4) =$
$= 13k \cdot 10^2 + 13 \cdot 8 = 13 \cdot (10^2k + 8)$
3)$10^{6(n+1)+3} + 1 = 10^{(6n+1)} \cdot 10^3 + 1 = (13k + 1) \cdot 10^3 + 1 = 10^3 \cdot 13k + 13 \cdot 77 =$
$= 13 \cdot (10^3k + 77)$
4)$10^{6(n+1)+4} - 3 = 10^{6(n+1)}?10^4 - 3 = (13k + 1) \cdot 10^4 - 3 = 13k \cdot 10^4 + 13 \cdot 769 =$
$= 13 \cdot (10^4k + 769)$
5)$10^{6(n+1)+5} - 4 = 10^{6(n+1)} \cdot 10^5 - 4 = (13k + 1) \cdot 10^5 - 4 = 13?10^5k + 13 \cdot 7692 =$
$= 13 \cdot (10^5k + 7692)$
6)$10^{6(n+1)+1} - 1 = 10^{6(n+1)} \cdot 10^6 - 1 = (13k + 1) \cdot 10^6 - 1 = 13 \cdot 10^6k + 10^6 - 1 =$
$= 13 \cdot (10^6k + 76923)$
Nyní je zřetelně vidět, že dané číslo je dělitelné třinácti.

Dělitelnost čtrnácti
Číslo je dělitelné 14 právě když je dělitelný čtrnácti ciferný součet
$a_0 - 4a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 - 2a_5 - 6a_6 - 4a_7 + 2a_8...$
Př.
45 483 144 : 14 = 3 248 786
$1 \cdot 4 - 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 8 - 2 \cdot 4 - 6 \cdot 5 - 4 \cdot 4 =$
$= 4 - 16 + 2 + 18 + 32 - 8 - 30 - 16 = -14$

Důkaz:
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i + ...$
Od tohoto čísla odečteme podle kritéria součet všech součinů jednotlivých cifer čísla s odpovídajícím členem uvedené posloupnosti.
$(a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i...) -$
$-(a - 4b + 2c + 6d + 4e - 2f - 6g - 4h + 2i...)$
A dostaneme :

$(10+4)b+(10^2-2)c+(10^3-6)d+(10^4-4)e+(10^5+2)f+(10^6+6)g+ +(10^7+4)h+$
$(10^8-2)i+...$

Dále dokážeme matematickou indukcí:
$\forall mn \geq 0, \exists k \in N$tak, že:

$1)10^{6n+1}+4=14k$
$2)10^{6n+2}-2=14k$
$3)10^{6n+3}-6=14k$
$4)10^{6n+4}-4=14k$
$5)10^{6n+5}+2=14k$
$6)10^{6n+6}+6=14k$

Pro n = 0
$10+4=14$
$10^2-2=98=14\cdot 7$
$10^3-6=994=14\cdot 71$
$10^4-4=9996=14\cdot 714$
$10^5+2=100002=14\cdot 7143$
$10^6+6=1000006=14\cdot 71429$

$6)10^{(6n+6)}+6=10^{6(n+1)}+6=14k...10^{6(n+1)}=14k-6=14k+14-6=$
$=14k+8$
$10^{6(n+2)}+6=10^{6(n+1)}\cdot 10^6+6=(14k+8)\cdot 10^6+6=14\cdot 10^6k+8?106+6=$
$=14\cdot 10^6k+14\cdot 751429=14\cdot(10^6k+571429)$
$1)10^{6(n+1)+1}+4=10^{6(n+1)}?10+4=(14k+8)\cdot 10+4=14\cdot 10k+84=$
$=14\cdot(10k+6)$
$2)10^{6(n+1)+2}-2=10^{6(n+1)}\cdot 10^2-2=(14k+8)\cdot 10^2-2=14\cdot 10^2k+1457=$
$=14\cdot(10^2k+57)$
$3)10^{6(n+1)+3}-6=10^{6(n+1)})\cdot 10^3-6=(14k+8)\cdot 10^3-6=14\cdot 10^3k+14\cdot 571=$
$=14\cdot(10^3k+571)$
$4)10^{6(n+1)+4}-4=10^{6(n+1)}\cdot 10^4-4=(14k+8)\cdot 10^4-4=14\cdot 10^4k+14\cdot 5714=$
$=14\cdot(10^4k+5714)$
$5)10^{6(n+1)+5}+2=10^{6(n+1)}\cdot 10^5+2=(14k+8)\cdot 10^5+2=14\cdot 10^5k+14\cdot 57143=$
$=14\cdot(10^5k+57143)$
Nyní je zřetelně vidět, že dané číslo je dělitelné čtrnácti.

Dělitelnost patnácti
Číslo je dělitelné 15 právě když je dělitelný patnácti ciferný součet $a_0-5a_1-5a_2-5a_3-5a_4...$

př.
19 178 235 : 15 = 1 278 549
$1\cdot 5-5\cdot 3-5\cdot 2-5\cdot 8-5\cdot 7-5\cdot 1-5\cdot 9-5\cdot 1=5-15-10-40-35-5-45-5=$
= -150

Důkaz:
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i + ...$
Od tohoto čísla odečteme podle kritéria součet všech součinů jednotlivých cifer čísla s odpovídajícím členem uvedené posloupnosti.
$(a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i...)-$
$-(a - 5b - 5c - 5d - 5e - 5f - 5g - 5h - 5i...)$
A dostaneme :
$(10+5)b+(10^2+5)c+(10^3+5)d+(10^4+5)e+(10^5+5)f+(10^6+5)g+ +(10^7+5)h+(10^8+5)i+...$

Dále provedeme matematickou indukcí:
$\forall n \geq 1, \exists k \in N$
$10^n + 5 = 15k$
n = 1 ... $10 + 5 = 15$
$10^n + 5 = 15k$
$10^n = 15k - 5$
$10^{n+1} + 5 = 10^n \cdot 10 + 5 = (15k - 5) \cdot 10 + 5 = 15 \cdot 10k - 45 = 15 \cdot (10k - 3)$
Nyní je zřetelně vidět, že dané číslo je dělitelné patnácti.

Dělitelnost šestnácti
Číslo je dělitelné 16 právě když je dělitelný šestnácti ciferný součet:
$a_0 - 6a_1 + 4a_2 + 8a_3$
Př.
1 579 872 : 16 = 98 742
$1 \cdot 2 - 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 8 \cdot 9 = 2 - 42 + 32 + 72 = 64...1 \cdot 4 - 6 \cdot 6 = -32...1 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = 16$

Důkaz:
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i + ...$
Od tohoto čísla odečteme podle kritéria součet všech součinů jednotlivých cifer čísla s odpovídajícím členem uvedené posloupnosti.
$(a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i...) - (a - 6b + 4c + 8d)$
A dostaneme :
$(10 + 6)b + (10^2 - 4)c + (10^3 - 8)d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i + ...$

Dále matematickou indukcí:
$\forall n \geq 4, \exists k \in N$
$10^n = 16k$
n = 1 ... $10 + 6 = 16$
n = 2 ... $10^2 - 4 = 96 = 16 \cdot 6$
n = 3 ... $10^3 - 8 = 992 = 16 \cdot 62$
n = 4 ... $10^4 = 10000 = 16 \cdot 625$

$10^{n+1} = 10^n \cdot 10 = 16 \cdot 10k = 16 \cdot (10k)$

Nyní je zřetelně vidět, že dané číslo je dělitelné šestnácti.

Dělitelnost sedmnácti
Číslo je dělitelné 17 právě když je dělitelný sedmnácti ciferný součet
$a_0 - 7a_1 - 2a_2 - 3a_3 + 4a_4 + 6a_5 - 8a_6 + 5a_7 - a_8 + 7a_9 + 2a_{10}...$

Př.

11 183 518 : 17 = 657 854

$1 \cdot 8 - 7 \cdot 1 - 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 8 + 6 \cdot 1 - 8 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8 - 7 - 10 - 9 + 32 + 6 - 8 + 5 = -17$

Důkaz:
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i + ...$
Od tohoto čísla odečteme podle kritéria součet všech součinů jednotlivých cifer čísla s odpovídajícím členem uvedené posloupnosti.
$(a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i...) -$
$-(a - 7b - 2c - 3d + 4e + 6f - 8g + 5h - i...)$
A dostaneme :
$(10 + 7)b + (10^2 + 2)c + (10^3 + 3)d + (10^4 - 4)e + (10^5 - 6)f + (10^6 + 8)g +$
$+(10^7 - 5)h + (10^8 + 1)i + ...$

Dále pokračujeme matematickou indukcí:

1) $10^{16n} - 1 = 17k$
2) $10^{16n+1} + 7 = 17k$
3) $10^{16n+2} + 2 = 17k$
4) $10^{16n+3} + 3 = 17k$
5) $10^{16n+4} - 4 = 17k$
6) $10^{16n+5} - 6 = 17k$
7) $10^{16n+6} + 8 = 17k$
8) $10^{16n+7} - 5 = 17k$
9) $10^{16n+8} + 1 = 17k$
10) $10^{16n+9} - 7 = 17k$
11) $10^{16n+10} - 2 = 17k$
12) $10^{16n+11} - 3 = 17k$
13) $10^{16n+12} + 4 = 17k$
14) $10^{16n+13} + 6 = 17k$
15) $10^{16n+14} - 8 = 17k$
16) $10^{16n+15} + 5 = 17k$

n = 0
1) 1 - 1 = 0
2) 10 + 7 = 17
3) $10^2 + 2 = 102 = 17 \cdot 6$
4) $10^3 + 3 = 1003 = 17 \cdot 59$
5) $10^4 - 4 = 9996 = 17 \cdot 588$
6) $10^5 - 6 = 99994 = 17 \cdot 5882$
7) $10^6 + 8 = 1000008 = 17 \cdot 58824$
8) $10^7 - 5 = 9999995 = 17 \cdot 588235$
9) $10^8 + 1 = 100000001 = 17 \cdot 5882353...10^8 = 17x - 1$
10) $10^9 - 7 = 999999993 = 17 \cdot 58823529... = (17x - 1) \cdot 10 - 7 =$

$= 17 \cdot 10x - 17 = 17 \cdot (10x - 1)$
$11) 10^{10} - 2 = 9999999998 = 17 \cdot 588235294... = (17x - 1) \cdot 10^2 - 2 =$
$= 17 \cdot 10^2 x - (10^2 + 2) = 17 \cdot (10^2 x - 6)$
$12) 10^{11} - 3 = 99999999997 = 17 \cdot 5882352941... = (17x - 1) \cdot 10^3 - 3 =$
$= 17 \cdot 10^3 x - (10^3 + 3) = 17 \cdot (10^3 x - 59)$
$13) 10^{12} + 4 = 1000000000004 = 17 \cdot 58823529412... = (17x - 1) \cdot 10^4 + 4 =$
$= 17 \cdot 10^4 x - (10^4 - 4) = 17 \cdot (10^4 x - 588)$
$14) 10^{13} + 6 = 10000000000006 = 17 \cdot 588235294118... = (17x - 1 \cdot 10^5 + 6 =$
$= 17 \cdot 10^5 x - (10^5 - 6) = 17 \cdot (10^5 x - 5882)$
$15) 10^{14} - 8 = 99999999999992 = 17 \cdot 5882352941176... =$
$= (17x - 1) \cdot 10^6 - 8 = 17 \cdot 10^6 x - (10^6 + 8) = 17 \cdot (10^6 x - 58824)$
$16) 10^{15} + 5 = 1000000000000005 = 17 \cdot 58823529411765... =$
$= (17x - 1) \cdot 10^7 + 5 = 7 \cdot 10^7 x - (10^7 - 5) == 17 \cdot (10^7 x - 588235)$

$\forall n \geq 1, \exists k \in N$
$10^{16n} - 1 = (17x - 1) \cdot 10^8 - 1 = 17 \cdot 10^8 x - (10^8 + 1) = 17 \cdot (10^8 x - 5882353)$
$(10^8 x - 5882353) = y$
$10^{16n} - 1 = 17y ... 10^{16n} = 17y + 1$

$1)\ 10^{16n} - 1 = 17k ... 10^{16n} = 17k + 1$
$10^{16(n+1)} - 1 = 10^{16n} \cdot 10^{16} - 1 = (17k + 1) \cdot 10^{16} - 1 = 17 \cdot 10^{16} k + 10^{16} - 1 =$
$= 17 \cdot 10^{16} k + 17y = 17 \cdot (10^{16} k + y)$

Označme: $10^{16(n+1)} = 17k + 1$

$2) 10^{16n+1} + 7 = 17k$
$10^{16(n+1)+1} + 7 = 10^{16(n+1)} \cdot 10 + 7 = (17k + 1) \cdot 10 + 7 = 17 \cdot (10k + 1)$
$3) 10^{16(n+1)+2} + 2 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^2 + 2 = (17k + 1) \cdot 10^2 + 2 = 17 \cdot (10^2 k + 6)$
$4) 10^{16(n+1)+3} + 3 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^3 + 3 = (17k + 1) \cdot 10^3 + 3 = 17 \cdot (10^3 k + 59)$
$5) 10^{16(n+1)+4} - 4 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^4 - 4 = (17k + 1) \cdot 10^4 - 4 = 17 \cdot (10^4 k + 588)$
$6) 10^{16(n+1)+5} - 6 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^5 - 6 = (17k + 1) \cdot 10^5 - 6 = 17 \cdot (10^5 k + 5882)$
$7) 10^{16(n+1)+6} + 8 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^6 + 8 = (17k + 1) \cdot 10^6 + 8 = 17 \cdot (10^6 k + 58824)$
$8) 10^{16(n+1)+7} - 5 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^7 - 5 = (17k + 1) \cdot 10^7 - 5 = 17 \cdot (10^7 k + 588235)$
$9) 10^{16(n+1)+8} + 1 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^8 + 1 = (17k + 1) \cdot 10^8 + 1 = 17 \cdot (10^8 k + 5882353)$
$10) 10^{16(n+1)+9} - 7 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^9 - 7 = (17k + 1) \cdot 10^9 - 7 = 17 \cdot (10^9 k + (10x - 1))$
$11) 10^{16(n+1)+10} - 2 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^{10} - 2 = (17k + 1) \cdot 10^{10} - 2 =$
$= 17 \cdot (10^{10} k + (10^2 x - 6))$
$12) 10^{16(n+1)+11} - 3 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^{11} - 3 = (17k + 1) \cdot 10^{11} - 3 =$
$= 17 \cdot (10^{11} k + (10^3 x - 59))$
$13) 10^{16(n+1)+12} + 4 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^{12} + 4 = (17k + 1) \cdot 10^{12} + 4 =$
$= 17 \cdot (10^{12} k + (10^4 x - 588))$
$14) 10^{16(n+1)+13} + 6 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^{13} + 6 = (17k + 1) \cdot 10^{13} + 6 =$
$= 17 \cdot (10^{13} k + (10^5 x - 5882))$

$15) 10^{16(n+1)+14} - 8 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^{14} - 8 = (17k+1) \cdot 10^{14} - 8 =$
$= 17 \cdot (10^{14}k + (10^6 x - 58824))$
$16) 10^{16(n+1)+15} + 5 = 10^{16(n+1)} \cdot 10^{15} + 5 = (17k+1) \cdot 10^{15} + 5 =$
$= 17 \cdot (10^{15}k + (10^7 x - 588235))$

Nyní je zřetelně vidět, že dané číslo je dělitelné sedmnácti.

Dělitelnost osmnácti
Číslo je dělitelné 18 právě když je dělitelný osmnácti ciferný součet
$a_0 - 8a_1 - 8a_2 - 8a_3 ...$
Př. 173 833 398 :18 = 9 657 411
$1 \cdot 8 - 8 \cdot 9 - 8 \cdot 3 - 8 \cdot 3 - 8 \cdot 3 - 8 \cdot 8 - 8 \cdot 3 - 8 \cdot 7 - 8 \cdot 1 =$
$= 8 - 72 - 24 - 24 - 24 - 64 - 24 - 56 - 8 = -288$
$1 \cdot 8 - 8 \cdot 8 - 8 \cdot 2 = 8 - 64 - 16 = -72 \implies 1 \cdot 2 - 8 \cdot 7 = 2 - 56 = -54$

Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 10^2 c + 10^3 d + 10^4 e + 10^5 f + 10^6 g + 10^7 h + 10^8 i + ...$
Od tohoto čísla odečteme podle kritéria součet všech součinů jednotlivých cifer čísla s odpovídajícím členem uvedené posloupnosti.
$(a + 10b + 10_2 c + 10_3 d + 10^4 e + 10^5 f + 10^6 g + 10^7 h + 10^8 i ...) -$
$-(a - 8b - 8c - 8d - 8e - 8f - 8g - 8h - 8i ...)$
A dostaneme : $(10+8)b + (10^2+8)c + (10^3+8)d + (10^4+8)e + (10^5+8)f +$
$+(10^6+8)g + (10^7+8)h + (10^8+8)i + ...$

Dále matematickou indukcí:
$\forall n \geq 1 \; \exists k \in N$
$10^n + 8 = 18 \cdot k$
n = 1 ... $10 + 8 = 18$
n = 2 ... $10^2 + 8 = 108 = 18 \cdot 6$
Nechť $10^n = 18 \cdot k - 8$
potom $10^{n+1} = 10^n \cdot 10 + 8 = (18 \cdot k - 8) \cdot 10 + 8 = 18 \cdot 10 \cdot k - 72 = 18 \cdot (10k - 4)$
Nyní je zřetelně vidět, že dané číslo je dělitelné osmnácti.

Dělitelnost devatenácti
Číslo je dělitelné devatenácti právě tehdy, když součet počtu desítek s dvojnásobkem jednotek je dělitelný číslem 19.

Důkaz:
Každé číslo N se dá vyjádřit jako : $N = 10x + y$
Kde x je počet desítek (celkový počet všech desítek čísla N) a y je číslice na místě jednotek.
Chceme dokázat, že číslo N je dělitelné číslem 19 právě tehdy, když číslo
$N' = x + 2y$ je násobkem čísla 19.
Vynásobíme číslo N' číslem 10 a od součinu odečteme číslo N:

10 N' - N = 10(x + 2y) - (10x +y) = 19y
Z tohoto je zřejmé, že je-li číslo *N'* dělitelné číslem 19, pak je i číslo *N = 10 N' - 19y* dělitelné číslem 19. Stejně tak, je-li *N* dělitelné číslem 19 je i *10N' = N + 19y* násobkem čísla 19, a proto i samotné číslo *N'* je dělitelné číslem 19.

Př. 2 117 265

$$
\begin{array}{c}
211726|5 \\
+10 \\
\hline
21173|6 \\
+12 \\
\hline
2118|5 \\
+10 \\
\hline
212|8 \\
+16 \\
\hline
22|8 \\
+16 \\
\hline
3|8 \\
+16 \\
\hline
19
\end{array}
$$

Číslo 19 je dělitelné devatenácti a tudíž dělí i čísla 38, 228, 2 128, 21 185, 211 736, 2 117 265.

Dělitelnost dvaceti
Číslo je dělitelné 20 právě když je dělitelný dvaceti ciferný součet $a_0 + 10a_1$

Př. 13 095 760 : 20 = 654 788

$1 \cdot 0 + 10 \cdot 6 = 60$

Důkaz:
Označme, že číslo N má a jednotek, b desítek, c stovek, d tisíců atd.
$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i + ...$
Od tohoto čísla odečteme podle kritéria součet všech součinů jednotlivých cifer čísla s odpovídajícím členem uvedené posloupnosti.
$(a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i...) - (a + 10b)$
A dostaneme : $10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 107h + 10^8i + ...$

Dále matematickou indukcí:
$\forall n \geq 2\ \exists k \in N$
$10^n = 20k$
n = 2 ...$10^2 = 20 \cdot 5$
$10^{n+1} = 10^n \cdot 10 = 20k \cdot 10 = 20 \cdot (10k)$
Nyní je zřetelně vidět, že dané číslo je dělitelné dvaceti.

Dělitelnost celých čísel v soustavách o různých základech

Tabulka prvních padesáti čísel v příslušné z-adické soustavě

Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	2	2	2	2	2	2	2	2
11	10	3	3	3	3	3	3	3
100	11	10	4	4	4	4	4	4
101	12	11	10	5	5	5	5	5
110	20	12	11	10	6	6	6	6
111	21	13	12	11	10	7	7	7
1000	22	20	13	12	11	10	8	8
1001	100	21	14	13	12	11	10	9
1010	101	22	20	14	13	12	11	10
1011	102	23	21	15	14	13	12	11
1100	110	30	22	20	15	14	13	12
1101	111	31	23	21	16	15	14	13
1110	112	32	24	22	20	16	15	14
1111	120	33	30	23	21	17	16	15
10000	121	100	31	24	22	20	17	16
10001	122	101	32	25	23	21	18	17
10010	200	102	33	30	24	22	20	18
10011	201	103	34	31	25	23	21	19
10100	202	110	40	32	26	24	22	20
10101	210	111	41	33	30	25	23	21
10110	211	112	42	34	31	26	24	22
10111	212	113	43	35	32	27	2	23
11000	220	120	44	40	33	30	26	24
11001	221	121	100	41	34	31	27	25

11010	222	122	101	42	35	32	28	26
11011	1000	123	102	43	36	33	30	27
11100	1001	130	103	44	40	34	31	28
11101	1002	131	104	45	41	35	32	29
11110	1010	132	110	50	42	36	33	30
11111	1011	133	111	51	43	37	34	31
100000	1012	200	112	52	44	40	35	32
100001	1020	201	113	53	45	41	36	33
100010	1021	202	114	54	46	42	37	34
100011	1022	203	120	55	50	43	38	35
100100	1100	210	121	100	51	44	40	36
100101	1101	211	122	101	52	45	41	37
100110	1102	212	123	102	53	46	42	38
100111	1110	213	124	103	54	47	43	39
101000	1111	220	130	104	55	50	44	40
101001	1112	221	131	105	46	51	45	41
101010	1120	222	132	110	60	52	46	42
101011	1121	223	133	111	61	53	47	43
101100	1122	230	134	112	62	54	58	44
101101	1200	231	140	113	63	55	50	45
101110	1201	232	141	114	64	56	51	46
101111	1202	233	241	115	65	57	52	47
110000	1210	300	143	120	66	60	53	48
110001	1211	301	144	121	100	61	54	49
110010	1212	302	200	122	101	62	55	50

Polyadické číselné soustavy

V z-adické číselné soustavě lze každé přirozené číslo p vyjádřit ve tvaru tzv. z-adického rozvoje
$p = \Sigma_{i=0}^{n} a_i z^i = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z^1 + a_0 z^0$,
kde $z \in N \setminus \{1\}, a_i \in \{0, 1, 2, 3, ..., z-1\}$, a pak zapsat pomocí tzv. z-adického zápisu
$(\alpha_n \ \alpha_{n-1} ... \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0)_z$.
Zde z se nazývá základ z-adické číselné soustavy a α_i jsou znaky reprezentující čísla a_i.
Znaky α_i (popř. někdy také čísla a_i se nazývají číslice (cifry). Index i číslice a_i , resp. pozice, která tomuto indexu v číselném obrazu přísluší, se nazývá řád číslice a_i , resp. řád obrazu číslice a_i .
Číslice s indexem i se nazývá číslice řádu i nebo číslice *i-tého řádu.*
Nenulová číslice, která je v číselném obrazu přirozeného čísla p první zleva, se nazývá

číslice největšího řádu čísla p. Řád číslice největšího řádu přirozeného čísla p se nazývá řád přirozeného čísla p. Přirozené číslo řádu *n-1* se nazývá n-ciferné.

Polyadická soustava se základem dvě se nazývá dvojková soustava (binární, dyadická), se základem tři trojková (ternární), se základem osm osmičková (oktalová), se základem deset desítková (dekadická), se základem šestnáct šestnáctková (hexadecimální) atd.

Kritéria dělitelnosti

Vycházíme ze z-adického rozvoje přirozeného čísla $p = ...a_4a_3a_2a_1a_0$, kde $a_0, a_1, a_2, a_3...$ jsou cifry, tj. ze zápisu
$p = ... + a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z^1 + a_0z^0$
Výpočty provádíme v příslušných z-adických soustavách a čísla budeme zapisovat ve zkráceném z-adickém zápisu bez závorky a indexu označujícího základ, tj. místo $(a_na_{n-1}...a_2a_1a_0)_z$ pouze $a_na_{n-1}...a_2a_1a_0$.

Dělitelnost základem
Čísla dělitelná základem končí ve všech z-adických soustavách cifrou 0.
Př: $(21010)_3 = (192)_{10}$je dělitelné třemi

Dělitelnost v Z_3

Dělitelnost dvěma
Pro nalezení kriteria dělitelnost dvěma v trojkové soustavě použijeme rozklad čísla
$p = ... + a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z^1 + a_0z^0$ na
$p = (... + 1111a_4 + 111a_3 + 11a_2 + 1a_1) \cdot 2 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$.
Z tohoto zápisu je patrné, že číslo je dělitelné dvěma, právě když je dvěma dělitelný ciferný součet $(... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$ čísla p.

Př.
$(7237)_{10} = (100221001)_3 = 1 \cdot 3^8 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^0$
$(1 + 0 + 0 + 2 + 2 + 1 + 0 + 0 + 1)_3 = (21)_3...(1 + 2)_3 = (10)_3$
... číslo není dělitelné 2

$(1264)_{10} = (1201211)_3 = 1 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$
$(1 + 2 + 0 + 1 + 2 + 1 + 1)_3 = (22)_3...(2 + 2)_3 = (11)_3...(1 + 1)_3 = (2)_3$
... číslo je dělitelné 2

V desítkové soustavě by zápis čísla p vypadal takto:
$p = ... + a_4 3^4 + a_3 3^3 + a_2 3^2 + a_1 3^1 + a_0 3^0$.

Cifra 3 v trojkové soustavě neexistuje. Číslu 3 (tj. základu), odpovídá zápis $(10)_3$(čteme jedna nula, nikoliv deset). Závorku a index označující základ budeme vynechávat.

Dělitelnost v Z_4

Dělitelnost dvěma

Jelikož $p = (... + 2000a_4 + 200a_3 + 20a_2 + 2a_1) \cdot 2 + a_0$, je číslo p dělitelné dvěma, právě když je dělitelná dvěma cifra a_0 (tj. když číslo p končí *0* nebo *2*).

Dělitelnost třemi

Platí

$p = (... + 1111a_4 + 111a_3 + 11a_2 + 1a_1) \cdot 3 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$. Číslo p je dělitelné třemi, právě když je třemi dělitelný ciferný součet

$(... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$ čísla p.

Př.

$(1236)_{10} = (103110)_4 = 1 \cdot 4^5 + 3 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1$

$(103110)_4$ … číslo je dělitelné 2

$(1 + 0 + 3 + 1 + 1 + 0)_4 = (12)_4 ... (1 + 2)_4 = (3)_4 ...$ číslo je dělitelné 3

$(1437)_{10} = (112131)_4 = 1 \cdot 4^5 + 1 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$

$(112131)_4$… číslo není dělitelné 2

$(1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1)_4 = (21)_4 ... (2 + 1)_4 = (3)_4$ … číslo je dělitelné 3

Dělitelnost v Z_5

Dělitelnost dvěma

Jelikož $p = (... + 2222a_4 + 222a_3 + 22a_2 + 2a_1) \cdot 2 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné dvěma, právě když je dělitelný dvěma ciferný součet čísla p.

Dělitelnost třemi

$p = (... + 1313a_4 + 131a_3 + 13a_2 + 1a_1) \cdot 3 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) =$

$= (... + 1313a_4 + 132a_3 + 13a_2 + 2a_1) \cdot 3 + (... + a_4 - 2a_3 + a_2 - 2a_1 + a_0 =$

$= (... + 1314a_4 + 131a_3 + 14a_2 + a_1 + a_0) \cdot 3 + (... - a_4 + a_3 - a_2 + a_1 - a_0) \cdot 2$

Číslo p dělitelné třemi, právě když je třemi dělitelný alternovaný ciferný součet čísla p.

Dělitelnost čtyřmi

Jelikož $p = (... + 1111a_4 + 111a_3 + 11a_2 + 1a_1) \cdot 4 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné čtyřmi, právě když je dělitelný čtyřmi ciferný součet čísla p.

Př.

$(1644)_{10} = (23034)_5 = 2 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0$

$(2+3+0+3+4)_5 = (22)_5$ … číslo je dělitelné 2 a 4
$(4-3+0-3+2)_5 = (0)_5$… číslo je dělitelné 3

$(57152)_{10} = (3312102)_5 = 3 \cdot 5^6 + 3 \cdot 5^5 + 1 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^0$
$(3+3+1+2+1+0+2)_5 = (22)_5 ... (2+2)_5 = (4)_5$
… číslo je dělitelné 2 a 4
$(2-0+1-2+1-3+3)_5 = (2)_5$… číslo není dělitelné 3

Dělitelnost v Z_6

Dělitelnost dvěma
Jelikož $p = (... + 3000a_4 + 300a_3 + 30a_2 + 3a_1) \cdot 2 + a_0$, je číslo p dělitelné dvěma, právě když je dělitelná dvěma cifra a_0 (tj.$a_0 \in \{0, 2, 4\}$).
Kriterium bychom mohli objevit i takto:
Ze zápisu $p = (... + 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + 1a_1) \cdot 10 + a_0$ je patrné, že poslední cifra a_0 rozhoduje o dělitelnosti čísla p všemi děliteli čísla 10, tj. čísly 2,3, a 10 (číslo 1 zde neuvažujeme), neboť číslo $(... + 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2) \cdot 10$ čísly 2,3 a 10 dělitelné je. Číslo p je dělitelné dvěma, právě když je dělitelná dvěma cifra a_0.

Dělitelnost třemi
Jelikož $p = (... + 2000a_4 + 200a_3 + 20a_2 + 2a_1) \cdot 3 + a_0$, je číslo p dělitelné třemi, právě když je dělitelná třemi cifra a_0 (tj. $a_0 \in \{0, 3\}$).

Dělitelnost čtyřmi
Jelikož $p = (... + 1300a_4 + 130a_3 + 13a_2 + 1a_1) \cdot 4 + 2a_1 + a_0$, je číslo p dělitelné čtyřmi, právě když je dělitelné čtyřmi číslo $2a_1 + a_0$.
Jiné kritérium objevíme použitím zápisu
$p = (... + 100a_4 + 10a_3 + 1a_2) \cdot 100 + a_1 + a_0$, z něhož je patrné, že poslední dvojčíslí $a_1 + a_0$ rozhoduje o dělitelnosti čísla p všemi děliteli čísla 100, tj. 2, 3, 4, 13, 20, 30 a 100, neboť číslo čísly 2, 3, 4, 13, 20, 30 a 100 dělitelné je. Proto číslo p je dělitelné čtyřmi, jeli čtyřmi dělitelné poslední dvojčíslí.

Dělitelnost pěti
Jelikož $p = (... + 1111a_4 + 111a_3 + 11a_2 + 1a_1) \cdot 5 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné pěti, právě když je dělitelný pěti ciferný součet čísla p.

Př.
$(34734)_{10} = (424450)_6 = 4 \cdot 6^5 + 2 \cdot 6^4 + 4 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1$
… číslo je dělitelné 2, 3
… číslo není dělitelné 4
$(0+5+4+4+2+4)_6 = (31)_6 ... (3+1)_6 = (4)_6$ … číslo není dělitelné 5

$(12340)_{10} = (133044)_6 = 1 \cdot 6^5 + 3 \cdot 6^4 + 3 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0$

... číslo je dělitelné 2, 4
... číslo není dělitelné 3
$(1+3+3+0+4+4)_6 = (23)_6 ... (2+3)_6 = (5)_6$
... číslo je dělitelné 5

Dělitelnost v Z_7

Dělitelnost dvěma
Jelikož $p = (... + 3333a_4 + 333a_3 + 33a_2 + 3a_1) \cdot 2 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné dvěma, právě když je dělitelný dvěma ciferný součet čísla p.

Dělitelnost třemi
Platí $p = (... + 2222a_4 + 222a_3 + 22a_2 + 2a_1) \cdot 3 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné třemi, právě když je třemi dělitelný ciferný součet čísla p.

Dělitelnost čtyřmi
Platí $p = (... + 1515a_4 + 152a_3 + 15a_2 + 2a_1) \cdot 4 + (... + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné čtyřmi, právě když je čtyřmi dělitelný alternovaný ciferný součet čísla p.

Dělitelnost pěti
Jelikož
$p = (... + 1254125a_7 + 125412a_6 + 12541a_5 + 1254a_4 + 125a_3 + 12a_2 + 1a_1) \cdot 5 +$
$+(... + 3a_7 + 4a_6 + 2a_5 + a_4 + 3a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0)$ je číslo p dělitelné pěti, právě když je dělitelné pěti číslo p.

Příklad:
$p = (23562)_7 = (6120)_{10} = 6 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 0 \cdot 7^0$
$(1 \cdot 2)_7 + (3 \cdot 3)_7 + (4 \cdot 5)_7 + (2 \cdot 6)_7 + (1 \cdot 2)_7 =$
$= (2)_7 + (12)_7 + (26)_7 + (15)_7 + (2)_7 = (63)_7$
$(2 \cdot 6)_7 + (1 \cdot 3)_7 = (15)_7 + (3)_7 = (21)_7 a (2 \cdot 2)_7 + (1 \cdot 1)_7 = (5)_7$
... což je číslo dělitelné pěti
$(2+3+5+6+2)_7 = (13+11)_7 = (24)_7 ... (2+4_7) = (6)_7$
$(2-6+5-3+2)_7 = (12-12)_7 = (0)_7$ ... číslo je dělitelné 2, 3, 4

Dělitelnost šesti
Jelikož $p = (... + 1111a_4 + 111a_3 + 11a_2 + 1a_1) \cdot 6 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné šesti, právě když je dělitelný šesti ciferný součet čísla p.

Příklad:
$(18936)_{10} = (106131)_7 = 1 \cdot 7^5 + 6 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0$
$(1+0+6+1+3+1)_7 = (15)_7 (1+5)_7 = (6)_7$
... číslo je dělitelné 2, 3, 6
$(1-3+1-6+0-1)_7 = -(11)_7 (-1+1)_7 = (0)_7$ ... číslo je dělitelné 4

$(1 \cdot 1)_7 + (2 \cdot 3)_7 + (4 \cdot 1)_7 + (3 \cdot 6)_7 + (1 \cdot 0)_7 + (2 \cdot 1)_7 =$
$= (1)_7 + (6)_7 + (4)_7 + (24)_7 + (0)_7 + (2)_7 = (43)_7$
$(1 \cdot 3)_7 + (2 \cdot 4)_7 = (3)_7 + (11)_7 = (14)_7 ... (1 \cdot 4)_7 + (2 \cdot 1)_7 = (4)_7 + (2)_7 = (6)_7$
... číslo není dělitelné 5

$(119430)_{10} = (1005123)_7 = 1 \cdot 7^6 + \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0$
$(1 + 0 + 0 + 5 + 1 + 2 + 3)_7 = (15)_7 ... (1 + 5)_7 = (6)_7$
... číslo je dělitelné 2, 3, 6
$(3 - 2 + 1 - 5 + 0 - 0 + 1)_7 = -(2)_7$ ... číslo není dělitelné 4
$(1 \cdot 3)_7 + (2 \cdot 2)_7 + (4 \cdot 1)_7 + (3 \cdot 5)_7 + (1 \cdot 0)_7 + (2 \cdot 0)_7 + (4 \cdot 1)_7 =$
$= (3)_7 + (4)_7 + (4)_7 + (21)_7 + (0)_7 + (0)_7 + (4)_7 = (42)_7$
$(1 \cdot 2)_7 + (2 \cdot 4)_7 = (2)_7 + (11)_7 = (13)_7 ... (1 \cdot 3)_7 + (2 \cdot 1)_7 = (5)_7$
... číslo je dělitelné 5

Dělitelnost v Z_8

Dělitelnost dvěma
Jelikož $p = (... + 4000a_4 + 400a_3 + 40a_2 + 4a_1) \cdot 2 + a_0$, je číslo p dělitelné dvěma, právě když je dělitelná dvěma cifra a_0 (tj.$a_0 \in \{0, 2, 4, 6\}$).

Dělitelnost třemi
Jelikož $p = (... + 2525a_4 + 253a_3 + 25a_2 + 3a_1) \cdot 3 + (... + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné třemi, právě když je třemi dělitelný alternovaný ciferný součet čísla p.

Dělitelnost čtyřmi
Jelikož $p = (... + 2000a_4 + 200a_3 + 20a_2 + 2a_1) \cdot 4 + a_0$, je číslo p dělitelné čtyřmi, právě když je dělitelná čtyřmi cifra a_0 (tj. $a_0 \in \{0, 4\}$).

Dělitelnost pěti
Jelikož
$p = (... + 1463146a_7 + 146314a_6 + 14631a_5 + 1463a_4 + 146a_3 + 14a_2 + 1a_1) \cdot 5 +$
$+(... + 2a_7 + 4a_6 + 3a_5 + 1a_4 + 2a_3 + 4a_2 + 3a_1 + 1a_0)$
je číslo p dělitelné pěti, právě když je dělitelné pěti číslo
$(... + 2a_7 + 4a_6 + 3a_5 + 1a_4 + 2a_3 + 4a_2 + 3a_1 + 1a_0)$.

Dělitelnost šesti
Jelikož
$p = (... + 12525a_5 + 1252a_4 + 125a_3 + 13a_2 + 1a_1) \cdot 6 +$
$+(... + 2a_5 - 2a_4 + 2a_3 - 2a_2 + 2a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné šesti, právě když je dělitelný šesti ciferný součet $(... + 2a_5 - 2a_4 + 2a_3 - 2a_2 + 2a_1 + a_0)$ čísla p.

Dělitelnost sedmi

Jelikož $p = (... + 1111a_4 + 111a_3 + 11a_2 + 1a_1) \cdot 7 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné sedmi, právě když je dělitelný sedmi ciferný součet čísla p.

Př.:
$(52080)_{10} = (145560)_8 = 1 \cdot 8^5 + 4 \cdot 8^4 + 5 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1$
... číslo je dělitelné 2, 3, 4, 7
$(0 - 6 + 5 - 5 + 4 - 1)_8 = -(3)_8$
$(1 + 4 + 5 + 5 + 6 + 0)_8 = (25)_8 ... (2 + 5)_8 = (7)_8$
$(1 \cdot 0)_8 + (3 \cdot 6)_8 + (4 \cdot 5)_8 + (2 \cdot 5)_8 + (1 \cdot 4)_8 + (3 \cdot 1)8 =$
$= (0)_8 + (22)_8 + (24)_8 + (12)_8 + (4)_8 + (3)_8 = (67)_8$
$(1 \cdot 0)_8 + (3 \cdot 6)_8 + (4 \cdot 5)_8 + (2 \cdot 5)_8 + (1 \cdot 4)_8 + (3 \cdot 1)_8$ ... číslo je dělitelné 5
$(1 \cdot 7)_8 + (3 \cdot 6)_8 = (7)8 + (22)_8 = (31)_8 ... (1 \cdot 1)_8 + (3 \cdot 3)_8 = (1)8 + (11)_8 =$
$= (12)_8 = (1 \cdot 2)_8 + (3 \cdot 1)8 = (5)_8$ ... číslo je dělitelné 6

$(27195)_{10} = (65073)_8 = 6 \cdot 8^4 + 5 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0$
... číslo je dělitelné 7
... číslo není dělitelné 2, 4
$(3 - 7 + 0 - 5 + 6)_8 = -(3)_8$ ... číslo je dělitelné 3
$(6 + 5 + 0 + 7 + 3)_8 = (25)_8 ... (2 + 5)_8 = (7)_8$
$(1 \cdot 3)_8 + (3 \cdot 7)_8 + (4 \cdot 0)_8 + (2 \cdot 5)_8 + (1 \cdot 6)_8 = (3)_8 + (25)_8 + (0)_8 + (12)_8 + (6)_8 =$
$= (50)_8$
... číslo je dělitelné 5
$(1 \cdot 3)_8 + (2 \cdot 7)_8 - (2 \cdot 0)_8 + (2 \cdot 5)_8 - (2 \cdot 6)_8 = (3)_8 + (16)_8 - (0)_8 + (12)_8 - (14)_8 =$
$= (17)_8$
$(1 \cdot 7)_8 + (2 \cdot 1)_8 = (11)_8 ... (1 \cdot 1)_8 + (2 \cdot 1)_8 = (3)_8$
... číslo není dělitelné 6

$(418608)_{10} = (1461460)_8 = 1 \cdot 8^6 + 4 \cdot 8^5 + 6 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1$
... číslo je dělitelné 2, 3, 4
... číslo není dělitelné 7
$(0 - 6 + 4 - 1 + 6 - 4 + 1)_8 = (0)_8$
$(1 + 4 + 6 + 1 + 4 + 6 + 0)_8 = (26)_8 ... (2 + 6)_8 = (10)_8 ... (1 + 0)_8 = (1)_8$
$(1 \cdot 0)_8 + (3 \cdot 6)_8 + (4 \cdot 4)_8 + (2 \cdot 1)_8 + (1 \cdot 6)_8 + (3 \cdot 4)_8 + (4 \cdot 1)_8 =$
$= (0)_8 + (22)_8 + (20)_8 + (2)_8 + (6)_8 + (14)_8 + (4)_8 = (72)_8$
$(1 \cdot 2)_8 + (3 \cdot 7)_8 = (2)_8 + (25)_8 = (27)_8 ... (1 \cdot 7)_8 + (3 \cdot 2)_8 = (15_8)$
$(1 \cdot 5)_8 + (3 \cdot 1)_8 = (10)_8 ... (1 \cdot 0)_8 + (3 \cdot 1)_8 = (3)_8$
... číslo není dělitelné 5
$(1 \cdot 0)_8 + (2 \cdot 6)_8 - (2 \cdot 4)_8 + (2 \cdot 1)_8 - (2 \cdot 6)_8 + (2 \cdot 4)_8 - (1 \cdot 2)_8 =$
$= (0)_8 + (14)_8 - (10)_8 + (2)_8 - (14)_8 + (10)_8 - (2)_8 = (0)_8$
... číslo je dělitelné 6

Dělitelnost v Z_9

Dělitelnost dvěma

Jelikož $p = (... + 4444a_4 + 444a_3 + 44a_2 + 4a_1) \cdot 2 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné dvěma, právě když je dělitelný dvěma ciferný součet čísla p.

Př.
$(210256)_9 = 6 \cdot 9^0 + 5 \cdot 9^1 + 2 \cdot 9^2 + 0 \cdot 9^3 + 1 \cdot 9^4 + 2 \cdot 9^5 = (124872)_{10}$
$(2 + 1 + 0 + 2 + 5 + 6)_9 = (17)_9...(1 + 7)_9 = (8)_9$ … číslo je dělitelné 2
$(456244)_9 = 4 \cdot 9^0 + 4 \cdot 9^1 + 2 \cdot 9^2 + 6 \cdot 9^3 + 5 \cdot 9^4 + 4 \cdot 9^5 = (273577)_{10}$
$(4 + 5 + 6 + 2 + 4 + 4)_9 = (27)_9...(2 + 7)_9 = (10)_9...(1 + 0)_9 = (1)_9$
… číslo není dělitelné 2

Dělitelnost třemi

Jelikož $p = (... + 3000a_4 + 300a_3 + 30a_2 + 3a_1) \cdot 3 + a_0$, je číslo p dělitelné třemi, právě když je třemi dělitelná cifra a_0.

Př.
$(207673)_9 = 3 \cdot 9^0 + 7 \cdot 9^1 + 6 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9^3 + 0 \cdot 9^4 + 2 \cdot 9^5 = (123753)_{10}$
… číslo je dělitelné 3
$(17362401)_9 = 1 \cdot 9^0 + 0 \cdot 9^1 + 4 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^4 + 3 \cdot 9^5 + 7 \cdot 9^6 + 1 \cdot 9^7 =$
$= (8721352)_{10}$
… číslo není dělitelné 3

Dělitelnost čtyřmi

Jelikož $p = (... + 2222a_4 + 222a_3 + 22a_2 + 2a_1) \cdot 4 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné čtyřmi, právě když je dělitelný ciferný součet čísla p.

Př.
$(424747)_9 = 7 \cdot 9^0 + 4 \cdot 9^1 + 7 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^4 + 4 \cdot 9^5 = (252844)_{10}$
$(4 + 2 + 4 + 7 + 4 + 7)_9 = (31)_9...(3 + 1)_9 = (4)_9$
… číslo je dělitelné 4
$(2102024)_9 = 4 \cdot 9^0 + 2 \cdot 9^1 + 0 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9^3 + 0 \cdot 9^4 + 1 \cdot 9^5 + 2 \cdot 9^6 = (1123411)_{10}$
$(2 + 1 + 0 + 2 + 0 + 2 + 4)_9 = (12)_9...(1 + 2)_9 = (3)_9$
… číslo není dělitelné 4

Dělitelnost pěti

Jelikož
$p = (... + 171717a_6 + 17172a_5 + 1717a_4 + 172a_3 + 17a_2 + 2a_1) \cdot 5 +$
$+(... + a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - 1a_1 + a_0)$ je číslo p dělitelné pěti, právě když je dělitelný alternovaný ciferný součet čísla p.

Př.
$(774230)_9 = 0 \cdot 9^0 + 3 \cdot 9^1 + 2 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9^3 + 7 \cdot 9^4 + 7 \cdot 9^5 = (462375)_{10}$
$(0 - 3 + 2 - 4 + 7 - 7)_9 = -(5)_9$ … číslo je dělitelné 5
$(128532)_9 = 2 \cdot 9^0 + 3 \cdot 9^1 + 5 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^4 + 1 \cdot 9^5 = (78437)_{10}$
$(2 - 3 + 4 - 8 + 7)_9 = (-3)_9$ … číslo není dělitelné 5

Dělitelnost šesti

Jelikož
$p = (... + 1444a_4 + 144a_3 + 14a_2 + 1a_1) \cdot 6 + (... + 3a_4 + 3a_3 + 3a_2 + 3a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné šesti, právě když je dělitelný ciferný součet čísla p.

Př.
$(372660)_9 = 0 \cdot 9^0 + 6 \cdot 9^1 + 6 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9^3 + 7 \cdot 9^4 + 3 \cdot 9^5 = (225072)_{10}$
$(0 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 3)_9 = (80)_9$
$(0 + 3 \cdot 8)_9 = (26)_9 ... (6 + 3 \cdot 2)_9 = (13)_9 ... (3 + 3 \cdot 1)_9 = (6)_9$
… číslo je dělitelné 6
$(415431)_9 = 1 \cdot 9^0 + 3 \cdot 9^1 + 4 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9^3 + 1 \cdot 9^4 + 4 \cdot 9^5 = (246754)_{10}$
$(1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4)_9 = (56)_9 ... (6 + 3 \cdot 5)_9 = (23)_9$
$(3 + 3 \cdot 2)_9 = (10)_9 ... (0 + 3 \cdot 1)_9 = (3)_9$
… číslo není dělitelné 6

Dělitelnost sedmi

Jelikož
$p = (... + 1111a_4 + 111a_3 + 11a_2 + 1a_1) \cdot 7 +$
$+ (... + 1112a_4 + 112a_3 + 12a_2 + 2a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné sedmi, právě když je dělitelný sedmi číslo $(... + 1112a_4 + 112a_3 + 12a_2 + 2a_1 + a_0)$.

Př.
$(643)_9 = 3 \cdot 9^0 + 4 \cdot 9^1 + 6 \cdot 9^2 = (525)_{10}$
$(3 + 2 \cdot 4 + 12 \cdot 6)_9 = (85)_9 ... (5 + 2 \cdot 8)_9 = (23)_9 ... (3 + 2 \cdot 2)_9 = (3 + 4)^9 = (7)_9$
… číslo je dělitelné 7

Dělitelnost osmi

Jelikož $p = (... + 1111a_4 + 111a_3 + 11a_2 + 1a_1) \cdot 8 + (... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$, je číslo p dělitelné osmi, právě když je dělitelný ciferný součet čísla p.

Př.
$(1425723)_9 = 3 \cdot 9^0 + 2 \cdot 9^1 + 7 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^4 + 4 \cdot 9^5 + 1 \cdot 9^6 = (784992)_{10}$
$(3 + 2 + 7 + 5 + 2 + 4 + 1)_9 = (26)_9 ... (2 + 6)_9 = (8)_9$
… číslo je dělitelné 8
$(415431)_9 = 1 \cdot 9^0 + 3 \cdot 9^1 + 4 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9^3 + 1 \cdot 9^4 + 4 \cdot 9^5 = (246754)_{10}$
$(1 + 3 + 4 + 5 + 1 + 4)_9 = (20)_9 ... (2 + 0)_9 = (2)_9$
… číslo není dělitelné 8

Dělitelnost v Z_{10}

Tabulka zbytků vyjadřujících kriteria dělitelnosti jednotlivými přirozenými čísly

Dělitelnost v oborech integrity

Nechť S je obor integrity, tj.asociativní, komutativní okruh s 1, bez dělitelů nuly $(a, b \in S, a \neq 0, b \neq 0 \ je \ ab \neq 0)$. Nechť $a, b \in S$.
Budeme říkat, že b dělí a , jestliže existuje $c \in S$ tak, že $bc = a$. Píšeme $b|a$.
($2 \cdot 3 = 6, 2|6$)
Budeme říkat, že prvky $a, b \in S$ jsou asociované, jestliže $a \mid b$ a současně $b|a$. Píšeme $a \sim b$.
($2|2, 2|2$)
Prvky asociované s jednotkovým prvkem 1 se nazývají dělitelé jednotky. Množinu všech dělitelů jednotky značíme *U(S).*

Nechť S je obor integrity. Potom platí:
1. $a|0, 1|a, a|a$ pro každé $a \in S$.
$0 : 2 = 0$, $2 : 1 = 2$, $2 : 2 = 1$
2. Jestliže $a|b, b|c$, potom $a|c$.
$4 : 2 = 2$, $16 : 4 = 4$, $16 : 2 = 8$
3. Jestliže $a|b, c|d$, potom $ac|bd$.
$4 : 2 = 2$, $6 : 2 = 3$, $24 : 4 = 6$
4. $a|0$ právě tehdy, když $a = 0$.
5. Jestliže $ac|bc, c \neq 0$, potom $a \mid b$.
$(3 \cdot 4) : (1 \cdot 4) = 12 : 4 = 3, 3 : 1 = 3$
6. Jestliže $a|a_i$ pro každé i =1, … ,n , potom $a|(r_1a_1 + r_2a_2 + ... + r_na_n)$
pro každé $r_1, ..., r_n \in S$.

Nechť S je obor integrity. Potom platí:
1.*U(S)* tvoří grupu s operací násobení.
2.$a \sim b$ v S právě tehdy, když existuje $u \in U(S)$ tak, že $au = b$.
$3 \sim (-3)$, $\exists u = -1 \in U(Z), 3 \cdot (-1) = -3$

Nechť S je obor integrity, nechť $a, b \in S$.
Říkáme, že a je triviální dělitel prvku b, jestliže $a \sim 1$ nebo $a \sim b$.
Prvek $p \in S \setminus U(S), p \neq 0$ se nazývá ireducibilní, jestliže má pouze triviální dělitele, tj. jestliže $a|p$, potom $a \sim 1$ nebo $a \sim p$.

Nechť S je obor integrity, nechť v S platí podmínka (KŘD).
Jestliže $a_1, ...a_n...$, je posloupnost prvků z S taková, že $a_{n+1}|a_n$ pro každé $n \in N$, potom existuje $k \in N$ tak, že pro každé $r \in N$ je $a_{k+r} \sim a_k$.

Potom pro každý nenulový prvek $a \in S \setminus U(S)$ existuje ireducibilní prvek $p \in S$ takový, že $p|a$.

Nechť S je obor integrity. Nenulový prvek $p \in S$ $U(S)$ se nazývá prvočinitel, jestliže pro každé dva prvky $a, b \in S$ platí: když $p|ab$, potom $p|a$ nebo $p|b$.

Nechť S je obor integrity. Je-li prvek $p \in S$ pročinitel. Potom p je prvek ireducibilní.

Obor integrity S se nazývá Gaussův obor integrity (obor integrity s jednoznačným kanonickým rozkladem), jestliže pro každé $a \in S \setminus U(S), a \neq 0$ existuje $u \in U(S)$ a existují ireducibilní prvky $p_1, ..., p_k \in S$ takové, že $a = up_1p_2...p_k$, přičemž tento zápis je jednoznačný, tj. jestliže $a = vq_1q_2...q_r$, kde $v \in U(S)$, $q_1, ...q_r$jsou ireducibilní prvky S,potom $r = k$ a existuje bijekce $\varphi : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., r\}$ taková, že pro každé *i = 1, …,k* je $p_i \sim q_{\varphi(i)}$. Tento jednoznačný rozklad prvku a se nazývá kanonický rozklad prvku a.

$36 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
$-36 = -1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Kanonický rozklad $a = up_1p_2...p_k$ můžeme přepsat do tvaru $a = up_1^{m1}p_2^{m2}...p_l^{ml}$, kde $u \in U(S)$,$p_1, ..., p_l$ jsou ireducibilní prvky, $m, i \in N$ pro každé i = 1,… , l a $p_i \neq p_j$ pro každé $i \neq j$.

$36 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3$
$-36 = -1 \cdot 2^2 \cdot 3^3$

Nechť S je *Gaussův* obor integrity, nechť $a = up_1p_2...p_k, b = vq_1q_2...q_r$ jsou kanonické rozklady nenulových prvků $a, b \in S$. Potom $a \mid b$ právě tehdy, když existuje prosté zobrazení $\varphi : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., r\}$ takové, že $p_i \sim q_{\varphi(i)}$ pro každé *i = 1, … ,k*.

Obor integrity S se nazývá eukleidovský, jestliže existuje zobrazení
$\sigma : 0 \to Z$ takové, že platí:
1. $\sigma(a) \geq 0$ pro každé $a \in S$
2. pro každé $a, b \in S, b \neq 0$ existují $q, r \in S$ tak,
že $a = bq + r$, kde $r = 0$ nebo $\sigma(r) < \sigma(b)$
Zobrazení σ se nazývá ohodnocení.

Nechť S je komutativní , asociativní okruh s 1, nechť $a \in S$. Potom množina $aS = \{as : s \in S\}$ je ideál okruhu S.

Nechť S je komutativní, asociativní okruh s 1. Jestliže I je ideál okruhu S takový, že $I = aS$, kde $a \in S$, potom I se nazývá hlavní ideál.
Komutativní, asociativní okruh s 1 se nazývá okruh hlavních ideálů, jestliže každý ideál okruhu S je hlavní.

Obor integrity S se nazývá obor integrity hlavních ideálů,jestliže každý ideál oboru integrity S je hlavní.

Nechť S je okruh hlavních ideálů, nechť $a, b \in S$. Potom platí:
1. $a|b$ právě tehdy, když $bS \subseteq aS$
2. $a \sim b$ právě tehdy, když $aS = bS$.

Nechť S je okruh hlavních ideálů, nechť $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ...I_n \subseteq ...$ jsou ideály okruhu S. Potom existuje $k \in N$ tak, že $I_k = I_{k+1} = ...$, tj. pro každé $j \in N$je $I_{k+j} = I_k$.

Nechť S je okruh hlavních ideálů, nechť $a, b \in S$ jsou libovolné prvky. Potom množina $aS + bS = as_1 + bs_2 : s_1, s_2 \in S$ je ideál okruhu S, a tedy existuje $d \in S$ tak, že $dS = aS + bS$. Potom $d \sim (a, b)$.

Nechť S je obor integrity, nechť $a, b, d \in S$. Říkáme, že d je největší společný dělitel prvků a,b, jestliže platí:
1. $d|a, d|b$
2. jestliže prvek $g \in S$ je takový, že $g|a, g|b$, potom $g|d$. Píšeme $d = (a, b)$.

Je-li $d_1 = (a, b), d_2 = (a, b)$, potom $d_1 \sim d_2$.

Nechť S je Gaussův obor integrity. Potom existuje největší společný dělitel libovolných dvou prvků z S, tj. pro každé $a, b \in S$ existuje $d \in S$ tak, že $d \sim (a, b)$.

Euklidův algoritmus
Nechť S je eukleidovský obor integrity. Potom v S existuje největší společný dělitel libovolných dvou prvků z S.

Nechť S je eukleidovský obor integrity, nechť $a, b \in S$. Potom existují prvky $u, v \in S$ takové, že $(a, b) \sim ua + vb$.

Nechť S je obor integrity, nechť $a = bq + r$ pro $a, b, q, r \in S$. Potom existuje největší společný dělitel prvků a, b právě tehdy, když existuje největší společný dělitel prvků b, r. Platí $(a, b) \sim (b, r)$.

Je-li S eukleidovský obor integrity, potom S je okruh hlavních ideálů.

Nechť S je obor integrity hlavních ideálů. Potom S je Gaussův obor integrity.

Každý eukleidovský obor integrity je Gaussův obor integrity.

Gaussova celá čísla

$G_i = \{m + ni;\ m,\ n \in Z\}$

$(m + ni) + (k + li) = (m + k) + (n + l)i$, m, n, k, l ∈ Z $\implies$ m + k, n + l ∈ Z

$(m + ni) \cdot (k + li) = mk + nki + mli + nli^2 = (mk - nl) + (nk + ml)i$, m, n, k, l ∈ Z, mk - nl, nk + mr ∈ Z

G_i je obor integrity, protože:

$(m + ni) \cdot (k + li) = 0 \implies (mk - nl) + (nk + ml) \cdot i = 0$

$mk - nl = 0 \implies m^2k - nml = 0$

$nk + ml = 0 \implies n^2k + nml = 0$

$m^2k + n^2k = 0 \implies (m^2 + n^2) \cdot k = 0$

Pokud $m + ni \neq 0 \implies m \neq 0\ nebo\ n \neq 0 \implies m^2 + n^2 \neq 0 \implies k = 0$

$-nl = 0\ a\ ml = 0 \implies l = 0 \implies k + li = 0 + 0i = 0$

Definujeme ohodnocení $\sigma(m + ni) = m^2 + n^2 =\mid m + ni \mid^2 \implies \sigma(m + ni) \geq 0$

$\forall m + ni \in G_i$

$a = a_1 + a_2i$

$b = b_1 + b_2i, b \neq 0 \implies b_1 \neq 0\ nebo\ b_2 \neq 0$

$\frac{a}{b} = \frac{(a_1+a_2i)\cdot(b_1-b_2i)}{b_1^2+b_2^2} = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{b_1^2+b_2^2} + \frac{b_1a_2-a_1b_2}{b_1^2+b_2^2}i$

Označme:

$a_1b_1 + a_2b_2 = c_1$

$b_1a_2 - a_1b_2 = c_2$

$b_1^2 + b_2^2 = d$

$\frac{a}{b} = \frac{c_1}{d} + \frac{c_2}{d}i$

$\frac{c_1}{d} \in Q$ ... $\exists\ q_1 \in Z$ tak, že $\mid \frac{c_1}{d} - q_1 \mid \leq \frac{1}{2}$

$\frac{c_2}{d} \in Q$ ... $\exists\ q_2 \in Z$ tak, že $\mid \frac{c_2}{d} - q_2 \mid \leq \frac{1}{2}$

Položme $\frac{c_1}{d} - q_1 = \xi_1,\ \frac{c_2}{d} - q_2 = \xi_2 \quad ... \quad \mid \xi_1 \mid \leq \frac{1}{2},\ \mid \xi_2 \mid \leq \frac{1}{2}$

$\frac{c_1}{d} = \xi_1 + q_1,\ \frac{c_2}{d} = \xi_2 + q_2$

$\frac{a}{b} = \frac{c_1}{d} + \frac{c_2}{d}i = (\xi_1 + q_1) + (\xi_2 + q_2)i = (\xi_1 + \xi_2 i) + (q_1 + q_2 i)$

$a = a_1 + a_2i = (\xi_1 + \xi_2 i)b + (q_1 + q_2 i)b$

$a \in G_i,\ (q_1 + q_2 i)b \in G_i \implies (\xi_1 + \xi_2 i)b \in G_i,\ b \in G_i$

$\sigma((\xi_1 + \xi_2 i)b) = \sigma((\xi_1 + \xi_2 i) \cdot (b_1 + b_2 i)) =\mid (\xi_1 + \xi_2 i) \cdot (b_1 + b_2 i) \mid^2 =$

$=\mid \xi_1 + \xi_2 i \mid^2 \mid b_1 + b_2 i \mid^2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2) \cdot \mid b_1 + b_2 i \mid^2 \leq (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) \cdot (b_1 + b_2 i)^2$

$\mid \xi_1 \mid \leq \frac{1}{2} \implies \xi_1^2 \leq \frac{1}{4},\ \mid \xi_2 \mid \leq \frac{1}{2} \implies \xi_2^2 \leq \frac{1}{4}$

$\implies \sigma((\xi_1 + \xi_2 i)b) frac12(b_1^2 + b_2^2) < b_1^2 + b_2^2 = \sigma(b)$

σ je ohodnocení

G_i je euklidovský obor integrity

Jak vypadají jednotky v G_i … $(m+ni) \mid 1$
(m + ni)(k + li) = 1
$\sqrt{m^2+n^2} \cdot \sqrt{k^2+l^2} =\mid m+ni \mid\mid k+li \mid=\mid (m+ni)(k+li) \mid=\mid 1 \mid= 1$
$(m^2+n^2)(k^2+l^2) = 1$
$\sqrt{m^2+n^2} = 1$
$m^2+n^2 = 1^2 = 1$
$m^2 = 1 \wedge n^2 = 0$ … $m = \pm 1, n = 0$ … 1, -1
$m^2 = 0 \wedge n^2 = 1$ … $m = 0, n = \pm 1$ … $i, -i$
U(G_i)={1, -1, i, -i}

Př.
$G(\sqrt{5}i) = m + \sqrt{5}in;\ m,\ n \in Z$
$(m+n\sqrt{5}i) + (k+l\sqrt{5}i) = (m+k) + (n+l)\sqrt{5}i\ \in G(\sqrt{5}i)$
$(m+n\sqrt{5}i)(k+l\sqrt{5}i) = (mk-5nl) + \sqrt{5}i(ml+nk) \in G(\sqrt{5}i)$
jestliže
$(m+n\sqrt{5}i)(k+l\sqrt{5}i) = 1 \ldots \mid m+n\sqrt{5}i \mid \cdot \mid k+l\sqrt{5}i \mid=\mid (m+n\sqrt{5}i)(k+l\sqrt{5}i) \mid=\mid 1 \mid= 1$

$\mid m+n\sqrt{5}i \mid= \sqrt{m^2+5n^2}$
$\mid k+l\sqrt{5}i \mid= \sqrt{k^2+5l^2}$
$(m^2+5n^2) \cdot (k^2+5l^2) = 1^2 = 1$ … $m^2+5n^2 = k^2+5l^2 = 1$
Pokud $n \neq 0$ … $m^2+5n^2 > 1$ … $(m^2+5n^2) \cdot (k^2+5l^2) > 1$ … spor
$m^2+5n^2\ \in Z$
$k^2+5l^2\ \in Z$
$k+\sqrt{5}il \neq 0$ … $k^2+5l^2 \neq 0$
$\Longrightarrow n = 0$, stejně l = 0
$\Longrightarrow m+n\sqrt{5}i = m$
$\Longrightarrow k+l\sqrt{5}i = k$
$m^2k^2 = 1$… $m^2 = 1\ \wedge\ k^2 = 1$ … $m = \pm 1$ … $U(G(\sqrt{5}i))$=1, -1
$(2+3\sqrt{5}i)(2-3\sqrt{5}i) = (4+9\cdot 5) + (-6+6)\sqrt{5}i = 49$
$2+3\sqrt{5}i \mid 49$ $\quad$ $2-3\sqrt{5}i \mid 49$
$7 \mid 49$ $\quad$ $7 \mid 49$
… $G(\sqrt{5}i)$ není Gaussův obor integrity protože kanonický rozklad čísla 49 není jednoznačný

Př.
$G(\sqrt{2})$=$m+\sqrt{2}n \mid\ m,\ n \in Z\}$
$\sigma(m+\sqrt{2}n) =\mid m^2-2n^2 \mid\geq 0$
$a = a_1 + \sqrt{2}a_2$
$b = b_1 + \sqrt{2}b_2$
$b \neq 0$
$\frac{a}{b} = \frac{(a_1+a_2\sqrt{2})\cdot(b_1-b_2\sqrt{2})}{(b_1+b_2\sqrt{2})\cdot(b_1-b_2\sqrt{2})} = \frac{a_1b_1-2a_2b_2}{b_1^2-2b_2^2} + \frac{(a_2b_1-a_1b_2)\sqrt{2}}{b_1^2-2b_2^2}$

$\frac{a_1b_1-2a_2b_2}{b_1^2-2b_2^2} = q_1 + \xi_1$

$\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1^2-2b_2^2} = q_2 + \xi_2$

$q_1,\ q_2\ \in Z,\ |\ \xi_1$
$|\leq \frac{1}{2},\ |\ \xi_2\ |\leq \frac{1}{2}$

$\frac{a}{b} = (q_1 + \xi_1) + (q_2 + \xi_2)\sqrt{2} = (q_1 + \sqrt{2}q_2) + (\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2)$

$a = (q_1 + \sqrt{2}q_2)b + (\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2)b$
$a \in G_i,\ (q_1 + \sqrt{2}q_2)b\ \in G_i\ \ldots\ (\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2)b \in G_i, b \in G_i$

$\sigma(r) =|\ \xi_1^2 - 2\xi_2^2 \cdot\ |\ b_1^2 - 2b_1^2\ |\leq (|\ \xi_1\ |^2 + 2\ |\ \xi_2\ |^2)\sigma(b) \leq (\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4})\sigma(b) = \frac{3}{4}\sigma(b) < \sigma(b)$
$G(\sqrt{2})$ je euklidovský obor integrity $\Longrightarrow$ je Gaussův obor integrity

Př.
$G(\sqrt{2}i)$=$\{m + \sqrt{2}ni\ |\ m,\ n \in Z\}$
$\sigma(m + \sqrt{2}ni) = m^2 + 2n^2 \geq 0$
$a = a_1 + \sqrt{2}a_2i$
$b = b_1 + \sqrt{2}b_2i$
$b \neq 0$

$\frac{a}{b} = \frac{(a_1+a_2\sqrt{2}i)\cdot(b_1-b_2\sqrt{2}i)}{(b_1+b_2\sqrt{2}i)\cdot(b_1-b_2\sqrt{2}i)} = \frac{a_1b_1+2a_2b_2}{b_1^2+2b_2^2} + \frac{(a_2b_1-a_1b_2)\sqrt{2}i}{b_1^2+2b_2^2}$

$\frac{a_1b_1+2a_2b_2}{b_1^2+2b_2^2} = q_1 + \xi_1$

$\frac{a_2b_1-2a_1b_2}{b_1^2+2b_2^2} = q_2 + \xi_2$

$q_1,\ q_2 \in Z,\ |\ \xi_1\ |\leq \frac{1}{2},\ |\ \xi_2\ |\leq \frac{1}{2}$
$\frac{a}{b} = (q_1 + \xi_1) + (q_2 + \xi_2)\sqrt{2}i = (q_1 + \sqrt{2}q_2i) + (\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2i)$
$a = (q_1 + \sqrt{2}q_2i)b + (\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2i)b$
$a \in G_i,\ (q_1 + \sqrt{2}q_2i)b \in G_1\ \ldots\ (\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2i)b \in G_i,\ b \in G_i$

$\sigma(r) = (\xi_1^2 + 2\xi_2^2) \cdot (b_1^2 + 2b_2^2) \leq (|\ \xi_1\ |^2 + 2\ |\ \xi_2\ |^2)\sigma(b) \leq (\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4})\sigma(b) = \frac{3}{4}\sigma(b) < \sigma(b)$
$G(\sqrt{2}i)$ je euklidovský obor integrity $\Longrightarrow$ je Gaussův obor integrity

Př.
$G(\sqrt{2})$=$\{m+\sqrt{2}n|\ m,\ n \in Z\}$ je euklidovský - Gaussův
$\sigma(m+\sqrt{2}n) =| m^2-2n^2 | \geq 0$
Jak vypadají dělitelé 1
$(k+l\sqrt{2})(m+n\sqrt{2})=1$
$\sigma(k+l\sqrt{2})\cdot\sigma(m+n\sqrt{2}) =| k^2-2l^2 | \cdot | m^2-2n^2 |$
$| k^2-2l^2 | \cdot | m^2-2n^2 | = 1 \ldots | k^2-2l^2 | = 1 \ldots k^2-2l^2 = \pm 1$
$\ldots k = \pm 1,\ l = 0$
$\ldots \pm 1 + 0\cdot\sqrt{2}$
Hledáme v oboru Z řešení rovnice:
$k^2-2l^2 = \pm 1$ … Pellova rovnice

Pellovy rovnice: $x^2 - Dy^2 = \pm 1$
$x^2 - Dy^2 = \pm 1 \ldots k^2 - 2l^2 = \pm 1 \ldots$ D=2
Pellovy rovnice můžeme řešit PQa algoritmem. Je to jedna z hlavních metod řešení Pellových rovnic. [viy. literatura: Solving the generalized Pell equation $x_2 - Dy_2 = N$]
P_0, Q_0, D jsou celá čísla taková, že $Q_0 \neq 0, D > 0$, není druhou mocninou, $P_0^2 \equiv D\ (mod Q_0)$
Položme:
$A_{-2} = 0,\ A_{-1} = 1,\ B_{-2} = 1,\ B_{-1} = 0,\ G_{-2} = -P_0\ a\ G_{-1} = Q_0$
Potom:
$a_0 = \lfloor (P_0 + \sqrt{D})/Q_0 \rfloor$
$A_0 = a_0 A_{-1} + A_{-2}$
$B_0 = a_0 B_{-1} + B_{-2}$
$G_0 = a_0 G_{-1} + G_{-2}$
Dále $\forall i \geq 1$ klademe:
$a_i = \lfloor (P_i + \sqrt{D})/Q_i \rfloor$
$A_i = a_i A_{i-1} + A_{i-2}$
$B_i = a_i B_{i-1} + B_{i-2}$
$G_i = a_i G_{i-1} + G_{i-2}$
$P_i = a_{i-1} Q_{i-1} - P_{i-1}$
$Q_i = (D - P_i^2/Q_{i-1})$
$G_i,\ B_i$ budou řešení rovnice

Volíme-li pro D = 2 $P_0 = 0,\ Q_0 = 1$, potom $Q_0 = 1 \neq 0,\ D = 2 > 0$ a není druhou mocninou přirozeného čísla
$P_0^2 - D = 0^2 - 2 = -2 \cdot 1$, tedy $P_0^2 \equiv D (mod\ Q_0)$
Užití PQa algoritmu získáváme:
$A_{-2} = 0,\ A_{-1} = 1$
$B_{-2} = 1,\ B_{-1} = 0$
$G_{-2} = -P_0 = 0,\ G_{-1} = Q_0 = 1$

$a_0 = \lfloor (P_0 + \sqrt{D})/Q_0 \rfloor = a_0 = \lfloor (0 + \sqrt{2})/1 \rfloor = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$
$A_0 = a_0 A_{-1} + A_{-2} = 1 \cdot 1 + 0 = 1$
$B_0 = a_0 B_{-1} + B_{-2} = 1 \cdot 0 + 1 = 1$
$G_0 = a_0 G_{-1} + G_{-2} = 1 \cdot 1 + 0 = 1$
Řešení: $x = G_0,\ y = B_0$
$1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$

Pro i=1 máme:
$P_1 = a_0 Q_0 - P_0 = 1 \cdot 1 - 0 = 1$
$Q_1 = (2 - P_1^2/Q_0) = (2 - 1^2)/1 = 1$
$a_1 = \lfloor (P_1 + \sqrt{2})/Q_1 \rfloor = \lfloor (1 + \sqrt{2})/1 \rfloor = 2$
$A_1 = a_1 A_0 + A_{-1} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
$B_1 = a_1 B_0 + B_{-1} = 2 \cdot 1 + 0 = 2$
$G_1 = a_1 G_0 + G_{-1} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
Řešení: $x = G_1,\ y = B_1$
$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$

Pro i=2 máme:
$P_2 = a_1 Q_1 - P_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
$Q_2 = (2 - P_2^2/Q_1) = (2 - 1^2)/1 = 1$
$a_2 = \lfloor (P_2 + \sqrt{2})/Q_2 \rfloor = \lfloor (1 + \sqrt{2})/1 \rfloor = 2$
$A_2 = a_2 A_1 + A_0 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
$B_2 = a_2 B_1 + B_0 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
$G_2 = a_2 G_1 + G_0 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
Řešení: $x = G_2,\ y = B_2$
$7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1$

Pro i=3 máme:
$P_3 = a_2 Q_2 - P_2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
$Q_3 = (2 - P_3^2/Q_2) = (2 - 1^2)/1 = 1$
$a_3 = \lfloor (P_3 + \sqrt{2})/Q_3 \rfloor = \lfloor (1 + \sqrt{2})/1 \rfloor = 2$
$A_3 = a_3 A_2 + A_1 = 2 \cdot 7 + 3 = 17$
$B_3 = a_3 B_2 + B_1 = 2 \cdot 5 + 2 = 12$
$G_3 = a_3 G_2 + G_1 = 2 \cdot 7 + 3 = 17$
Řešení: $x = G_3,\ y = B_3$
$17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1$

Dále viz. tabulka:

i	P_i	Q_i	a_i	A_i	B_i	G_i	$G_i^2 - DB_i^2$	$X = G_i, y = B_i$
-2				0	1	1	-1	
-1				1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	-1	$\pm 1 + \sqrt{2}$
1	1	1	2	3	2	3	1	$3 \pm 2\sqrt{2}$
2	1	1	2	7	5	7	-1	$\pm 7 + 5\sqrt{2}$
3	1	1	2	17	12	17	1	$17 \pm 12\sqrt{2}$
4	1	1	2	41	29	41	-1	$\pm 41 + 29\sqrt{2}$
5	1	1	2	99	70	99	1	$99 \pm 70\sqrt{2}$
6	1	1	2	239	169	239	-1	$\pm 239 + 169\sqrt{2}$
7	1	1	2	577	408	577	1	$577 \pm 408\sqrt{2}$
8	1	1	2	1393	985	1393	-1	$\pm 1393 + 985\sqrt{2}$
9	1	1	2	3363	2378	3363	1	$3363 \pm 2378\sqrt{2}$
10	1	1	2	8119	5741	8119	-1	$\pm 8119 + 5741\sqrt{2}$
11	1	1	2	19601	13860	19601	1	$19601 \pm 13860\sqrt{2}$
12	1	1	2	47321	33461	47321	-1	$\pm 47321 + 33461\sqrt{2}$
13	1	1	2	114243	80782	114243	1	$114243 \pm 80782\sqrt{2}$
14	1	1	2	275807	195025	275807	-1	$\pm 275807 + 195025\sqrt{2}$
15	1	1	2	665857	470832	665857	1	$665857 \pm 470832\sqrt{2}$
16	1	1	2	1607521	1136689	1607521	-1	$\pm 1607521 + 1136689\sqrt{2}$
17	1	1	2	3880899	2744210	3880899	1	$3880899 \pm 2744210\sqrt{2}$
18	1	1	2	9369319	6625109	9369319	-1	$\pm 9369319 + 6625109\sqrt{2}$
19	1	1	2	22619537	15994428	22619537	1	$22619537 \pm 15994428\sqrt{2}$
20	1	1	2	54608393	3861395	54608393	-1	$\pm 54608393 + 3861395\sqrt{2}$

Celočíselná řešení rovnice $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ lze psát rekurentně:
$x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ y_0 = 1,\ y_1 = 0$
$\forall k \geq 1$
$x_k = 2x_{k-1} + x_{k-2}$
$y_k = 2y_{k-1} + y_{k-2}$

Př.
$x^2 - 3y^2 = \pm 1$
$A_{-2} = 0,\ A_{-1} = 1$
$B_{-2} = 1,\ B_{-1} = 0$
$G_{-2} = -P_0 = 0,\ G_{-1} = Q_0 = 1$
$G_{-1}^2 - DB_{-1}^2 = 1^2 - 3 \cdot 0 = 1$
$x = 1,\ y = 0$ je řešení

Pro i=0
$a_0 = \lfloor (P_0 + \sqrt{D})/Q_0 \rfloor = \lfloor (0 + \sqrt{3})/1 \rfloor = 1$
$A_0 = a_0 A_{-1} + A_{-2} = 1 \cdot 1 + 0 = 1$

$B_0 = a_0 B_{-1} + B_{-2} = 1 \cdot 0 + 1 = 1$
$G_0 = a_0 G_{-1} + G_{-2} = 1 \cdot 1 + 0 = 1$
Řešení: $x = G_0,\ y = B_0$
$1^2 - 3 \cdot 1^2 = -2$
není řešení

Pro i=1 máme:
$P_1 = a_0 Q_0 - P_0 = 1 \cdot 1 - 0 = 1$
$Q_1 = (2 - P_1^2/Q_0) = (3 - 1^2)/1 = 2$
$a_1 = \lfloor (P_1 + \sqrt{3})/Q_1 \rfloor = \lfloor (1 + \sqrt{3})/2 \rfloor = 1$
$A_1 = a_1 A_0 + A_{-1} = 1 \cdot 1 + 1 = 2$
$B_1 = a_1 B_0 + B_{-1} = 1 \cdot 1 + 0 = 1$
$G_1 = a_1 G_0 + G_{-1} = 1 \cdot 1 + 1 = 2$
Řešení: $x = G_1,\ y = B_1$
$2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1$
je řešení

Pro i=2 máme:
$P_2 = a_1 Q_1 - P_1 = 1 \cdot 2 - 1 = 1$
$Q_2 = (2 - P_2^2/Q_1) = (3 - 1^2)/2 = 1$
$a_2 = \lfloor (P_2 + \sqrt{2})/Q_2 \rfloor = \lfloor (1 + \sqrt{3})/1 \rfloor = 2$
$A_2 = a_2 A_1 + A_0 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
$B_2 = a_2 B_1 + B_0 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
$G_2 = a_2 G_1 + G_0 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
Řešení: $x = G_2,\ y = B_2$
$5^2 - 3 \cdot 3^2 = -2$
není řešení

Pro i=3 máme:
$P_3 = a_2 Q_2 - P_2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
$Q_3 = (2 - P_3^2/Q_2) = (3 - 1^2)/1 = 2$
$a_3 = \lfloor (P_3 + \sqrt{2})/Q_3 \rfloor = \lfloor (1 + \sqrt{3})/2 \rfloor = 1$
$A_3 = a_3 A_2 + A_1 = 1 \cdot 5 + 2 = 7$
$B_3 = a_3 B_2 + B_1 = 1 \cdot 3 + 1 = 4$
$G_3 = a_3 G_2 + G_1 = 1 \cdot 5 + 2 = 7$
Řešení: $x = G_3,\ y = B_3$
$7^2 - 3 \cdot 4^2 = 1$
je řešení

Dále viz. tabulka:

i	P_i	Q_i	a_i	A_i	B_i	G_i	$G_i^2 - DB_i^2$
-2				0	1	0	-3
-1				1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	-2
1	1	2	1	2	1	2	1
2	1	1	2	5	3	5	-2
3	1	2	1	7	4	7	1
4	1	1	2	19	11	19	-2
5	1	2	1	26	15	26	1
6	1	1	2	71	41	71	-2
7	1	2	1	97	56	97	1
8	1	1	2	265	153	265	-2
9	1	2	1	362	209	362	1
10	1	1	2	989	571	989	-2
11	1	2	1	1351	780	1351	1
12	1	1	2	3691	2131	3691	-2
13	1	2	1	5042	2911	5042	1
14	1	1	2	13775	7953	13775	-2
15	1	2	1	18817	10864	18817	1
16	1	1	2	51409	29681	51409	-2
17	1	2	1	70226	40545	70226	1
18	1	1	2	191861	110771	191861	-2
19	1	2	1	262087	151316	262087	1
20	1	1	2	716035	413403	716035	-2

Př.

$x^2 - 2y^2 = \pm 2$

$P_0 = 0,\ Q_0 = 2$, potom

$Q_0 = 2 \neq 0,\ D = 2 > 0$, není druhou mocninou přirozeného čísla

$P_0^2 - D0^2 - 2 = -1 \cdot 2 \Longrightarrow P_0^2 \equiv D(mod Q_0)$

Užitím PQa algoritmu získáme:

$A_{-2} = 0,\ A_{-1} = 1$

$B_{-2} = 1,\ B_{-1} = 0$

$G_{-2} = -P_0 = 0\ a\ G_{-1} = Q_0 = 2$

Pro i=0

$a_0 = \lfloor (P_0 + \sqrt{D})/Q_0 \rfloor = \lfloor (0 + \sqrt{2})/2 \rfloor = 0$

$A_0 = a_0 A_{-1} + A_{-2} = 0 \cdot 1 + 0 = 0$

$B_0 = a_0 B_{-1} + B_{-2} = 0 \cdot 0 + 1 = 1$

$G_0 = a_0 G_{-1} + G_{-2} = 0 \cdot 2 + 0 = 0$

Řešení: $x = G_0,\ y = B_0$

$0^2 - 2 \cdot 1^2 = -2$

Pro i=1 máme:

$P_1 = a_0 Q_0 - P_0 = 0 \cdot 2 - 0 = 0$

$Q_1 = (2 - P_1^2/Q_0) = (2 - 0^2)/2 = 1$

$a_1 = \lfloor (P_1 + \sqrt{2})/Q_1 \rfloor = \lfloor (0 + \sqrt{2})/1 \rfloor = 1$

$A_1 = a_1 A_0 + A_{-1} = 1 \cdot 0 + 1 = 1$

$B_1 = a_1 B_0 + B_{-1} = 1 \cdot 1 + 0 = 1$

$G_1 = a_1 G_0 + G_{-1} = 1 \cdot 0 + 2 = 2$

Řešení: $x = G_1,\ y = B_1$

$2^2 - 2 \cdot 1^2 = 2$

Pro i=2 máme:

$P_2 = a_1 Q_1 - P_1 = 1 \cdot 1 - 0 = 1$

$Q_2 = (2 - P_2^2/Q_1) = (2 - 1^2)/1 = 1$

$a_2 = \lfloor (P_2 + \sqrt{2})/Q_2 \rfloor = \lfloor (1 + \sqrt{2})/1 \rfloor = 2$

$A_2 = a_2 A_1 + A_0 = 2 \cdot 1 + 0 = 2$

$B_2 = a_2 B_1 + B_0 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$G_2 = a_2 G_1 + G_0 = 2 \cdot 2 + 0 = 4$

Řešení: $x = G_2,\ y = B_2$

$4^2 - 2 \cdot 3^2 = -2$

Pro i=3 máme:

$P_3 = a_2 Q_2 - P_2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$Q_3 = (2 - P_3^2/Q_2) = (2 - 1^2)/1 = 1$

$a_3 = \lfloor (P_3 + \sqrt{2})/Q_3 \rfloor = \lfloor (1 + \sqrt{2})/1 \rfloor = 2$

$A_3 = a_3 A_2 + A_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$B_3 = a_3 B_2 + B_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$G_3 = a_3 G_2 + G_1 = 2 \cdot 4 + 2 = 10$

Řešení: $x = G_3,\ y = B_3$

$10^2 - 2 \cdot 7^2 = 2$

Dále viz. tabulka:

i	P_i	Q_i	a_i	A_i	B_i	G_i	$G_i^2 - DB_i^2$
-2				0	1	0	
-1				1	0	2	
0	0	2	0	0	1	0	-2
1	0	1	1	1	1	2	2
2	1	1	2	2	3	4	-2
3	1	1	2	5	7	10	2
4	1	1	2	12	17	24	-2
5	1	1	2	29	41	58	2
6	1	1	2	70	99	140	-2
7	1	1	2	169	239	338	2
8	1	1	2	408	577	816	-2
9	1	1	2	985	1393	1970	2
10	1	1	2	2378	3363	4756	-2
11	1	1	2	5741	8119	11482	2
12	1	1	2	13860	19601	27720	-2
13	1	1	2	33461	47321	66922	2
14	1	1	2	80782	114243	161564	-2
15	1	1	2	195025	275807	390050	2
16	1	1	2	470832	665857	941664	-2
17	1	1	2	1136689	1607521	2273378	2
18	1	1	2	2744210	3880899	5488420	-2

Literatura:

Zajímavá algebra - J.I.Perelman - Polytechnická knižnice - Praha 1985
Dějiny matematiky - Dirk J.Struik - Orbis - Praha 1963
Historie matematiky I Seminář pro vyučující na středních školách -J.Bečvář, E.Fuchs - JČMF,Brno 1994
Prehľad modernej algebry - G.Birkhoff, S Mac Lane - SNTL, Bratislava 1973
Základy algebry pro techniky - L.Kotek -SNTL - Praha 1968
Matematické vzorce - H.J.Bartsch - SNTL - Praha 1983
Dějiny matematiky ve středověku - A.P.Juškevič - Československá akademie věd - Praha 1977
Světonázorové problémy v matematice - E.Luhan - Praha 1986
Algebra a teoretická aritmetika - T.Katriňák a kol. - Alfa - Bratislava 1985
Solving the generalized Pell equation $x_2 - Dy_2 = N$ - J.P.Robertson - 2004
Internet